

HELSINGIN YLIOPISTO

**3D-mallinnus ja tulostaminen matematiikan opetuksessa**

Matematiikan ja tilastotieteen laitos  
Opettajankoulutus  
Pro gradu -tutkielma  
Miika Suvanto  
2015



# SISÄLTÖ

SISÄLTÖ .....	2
1 JOHDANTO .....	1
2 KOLMEDIMENSIONAALINEN TULOSTAMINEN, MÄÄRITELMÄ JA TEKNOLOGIA ...	4
2.1 3D-tulostimien käytettävyys ja saatavuus .....	4
2.2 Tulostusmenetelmät ja materiaalit.....	7
3 KASVATUSTIETEELLISIÄ NÄKÖKULMIA MATEMATIIKAN OPETUKSEEN .....	11
3.1 Matemaattinen oppiminen.....	11
3.2 Matemaattinen ajattelu .....	13
3.3 Matemaattinen hahmottamiskyky .....	14
4 3D-TULOSTAMINEN JA MALLINTAMINEN LUOKKAHUONEESSA.....	16
4.1 Opetussuunnitelman perusteita 3D-tulostuksen käytölle .....	19
4.2 Esimerkkejä käytännön toteutuksesta .....	20
5 LAADULLINEN TUTKIMUS: AINEISTO JA MENETELMÄ .....	25
6 PERUSKOULULAISTEN KÄSITYKSIÄ MALLINTAMISESTA JA TULOSTAMISESTA ..	28
7 JOHTOPÄÄTÖKSET.....	33
LÄHTEET:.....	36



# 1 JOHDANTO

*”3D-tulostamisella on potentiaalia mullistaa lähes kaikkien tavaroiden tuotanto”*

*-Barack Obama (CNN 2014)*

3D-tulostaminen on merkittävä uusi teknologia, jonka merkitys kasvaa vuosi vuodelta. 3D-tulostamisessa kolmiulotteinen malli muuttuu käsinkosketeltavaksi esineeksi suoraan tehdystä tietokonemallista kolmiulotteisen tulostimen avulla. Tulostustekniikalle on hahmoteltu monenlaisia soveltamismahdollisuuksia. On esitetty, että ruoka tehtäisiin tulevaisuudessa tulostamalla ja kotiin ei ostettaisi valmiita tavaroita. Nämä tulevaisuuden kuvat ovat toistaiseksi kuitenkin vielä spekulointia. On todennäköistä, että monien tuotteiden varaosien ja vastaavien tulostaminen tulee muuttamaan radikaalisti. Enää harvinaisten autojen osia ei tarvitse etsiä romuvarastolta, vaan rikkiäisen osan voi skannata ja tietokoneella korjata kokonaiseksi. Kahvipannuun voi tehdä uuden kahvan ilman, että tarvitsee ostaa kokonaan uutta keitintä.

Kolmiulotteinen mallinnus ja tulostaminen on jo nyt käytössä monessa yrityksessä. Muun muassa Kalevala-koru tekee joitain mallejaan metallitulostimen avulla. Hammasproteeseissa tulostaminen mahdollistaa yksilöllisten suuhun sopivien osien tekemisen. Tästä johtuen suurin osa 3D-mallinnus- ja tulostustutkimuksesta liittyykin nimenomaan hammaslääketieteeseen, josta löytyy tutkimusta myös Suomesta. Yleisin tapa tulostimien käyttämiseen on kuitenkin mallintaminen. Tulostaminen ei ole nopein tapa luoda sarjatuotantona asioita. Usein kokeiluversio toteutetaan halpana tulosteena. Sen ominaisuuksia pohditaan ja lopullinen versio tehdään tarkoituksenmukaista materiaalista. Käyttäjille tuote annetaan perinteiseen tapaan valmistettuna. Tilanne saattaa muuttua tulostintekniikan parantuessa.

3D-tulostamista on vähitellen alettu hyödyntää myös matematiikan opetuksessa. Matematiikan opetus ei opetusvälineiden suhteen ole kokenut suuria muutoksia vuosikymmeniin. Voisin jopa väittää, että laskimen jälkeen ei mitään uutta merkittävää ole laajamittaisesti tuotu luokkahuoneisiin. Laskinkaan ei ole tuonut opetukseen paljoa uutta. Suurimpana muutoksena se on mahdollistanut vaikeampien lukujen käyttämistä laskutoimituksissa ja erityisten laskumuistisääntöjen poisjättämistä. Kolmiulotteinen mallinnus ja 3D-tulostaminen tuo matematiikan opetukseen aivan uuden tason: asiat, joista aiemmin luotiin hauraita paperimalleja ja ”sinitarra-hammastikkuviritelmiä” voidaan nyt luoda kestävinä ja tarkkoina kappaleina ympäristöystävällisesti. Vaikeasti havainnollistettava avaruudellinen matematiikka voidaan helposti

luoda käsinkosketeltavaksi, ja vaikeasti havaittavasta asiasta tuleekin yksinkertaisempaa. Geometrian lisäksi tulostettavien esineiden avulla kyetään paremmin ymmärtämään erilaisia pintoja, joiden esittäminen oppitunnilla olisi muilla tekniikoilla hyvin vaikeaa. Oppijoiden on myös hyvä ymmärtää esineiden tuottamisprosessia mahdollisimman nykyaikaisten työvälineiden avulla tulevaisuuden työmahdollisuuksiensa vuoksi.

Opetuskäytössä tulostaminen ja siihen liittyvä mallinnus on Suomessa vasta alkutekijöissään. Muutamat yksittäiset opettajat ovat ottaneet mallinnuksen ja tulostamisen opetuskäyttöön lähinnä peruskoulun yläluokilla ja ammatillisissa oppilaitoksissa. Suomessa on myös muutamia yrityksiä, jotka ovat erikoistuneet tulostamisen opetukseen. Yhdysvalloissa tekniikka on päässyt jo pidemmälle ja usealla oppilaitoksella on tulostin käytettävissään. Tulostamisen käyttö on Yhdysvalloissa koululaitoksenkin puolesta suositeltavaa ja tästä syystä opettajat helpommin saavat laitteita. Yhdysvalloissa myös vanhempainyhdistykset usein keräävät rahaa koululaitteiden hankkimiseksi.

Internetistä löytyy useita sivustoja, joilla opettajat jakavat ilmaiseksi tuntisuunnitelmia ja ideoita tulostamiseen. Joillain näistä on jopa oma ohjelmansa koulujen tulostimien joukkorahoittamiseksi. Esimerkiksi Makerbot academy, Tinkeriny U ja Make.Digital tarjoavat tuntisuunnitelmia tai ideoita oppitunteja varten. Makerbotilla on erityinen joukkorahoitusmalli, jossa yhdistykset ja yksityishenkilöt maksavat joukkorahoituksena kouluille näiden toivomia laitteita ja materiaalia.

Tämän tutkielman aiheena on selvittää miten 3D-tulostusta ja kolmiulotteista mallintamista voidaan hyödyntää matematiikan opetuksessa ja mikä on sen mahdollinen lisäarvo opetuskäytössä. Tulen käsittelemään aihetta lähinnä peruskoulun yläluokkien ja lukio-opetuksen näkökulmasta. Samat perustelut ja opetusmenetelmät kuitenkin pätevät myös suurelta osin peruskoulun alaluokille, sekä soveltuvien osin ammatillisiin oppilaitoksiin ja korkeakouluihin. Tämän opetusteknologian käyttäminen on mahdollista myös muiden oppiaineiden opetuksessa, mutta työssäni keskityn matematiikan opettamiseen

Esitän tutkimuksessani 3D-tulostuksen tekniikkaa, materiaalivaihtoehtoja ja sitä, miten tulostaminen ja mallintaminen tapahtuu. Työssäni esitellään myös opetuskokeilu, jonka perusteella voidaan antaa jonkinlainen arvio siitä, kuinka oppilaat kokevat tekniikan käytön oppimisen, kuinka paljon he itse kokisivat oppivansa tekniikan avulla ja kuinka paljon aikaa minimissään kuluu käytön

opettamiseen. Työn tarkoituksena onkin antaa lukijalleen selkeä kuva siitä, miten ja miksi 3D-mallinnus ja tulostaminen kannattaa ottaa käyttöön opetuksessa vai kannattaako.

## **2 KOLMEDIMENSIONAALINEN TULOSTAMINEN, MÄÄRITELMÄ JA TEKNOLOGIA**

3D-tulostin on laite, jolla kyetään tavallisen paperille tulostetun kuvion sijaan toteuttamaan suoraan kolmiulotteisia kappaleita. Materiaalina tulostimen voi rakentaa lähtökohtaisesti käyttämään mitä vain materiaalia, jonka saa nestefaasiin alle 300 celsiuksen lämmössä ja jäähmetytään huoneenlämmössä. Tällä hetkellä yleisimmin käytössä on kuitenkin yksinkertaisia muoveja. Tulostimelle annetaan tulostusohjeet joko muistikortin, johdon tai langattoman yhteyden kautta. Prosessissa tulee olla käytettävissä sekä tulostin, että tietokone varustettuna sopivalla mallinnusohjelmalla tai internet-yhteys, jolla voidaan ottaa valmiita tulostettavia tiedostoja internetistä.

### **2.1 3D-tulostimien käytettävyys ja saatavuus**

Markkinoilla on olemassa lukuisia erihintaisia ja -kokoisia tulostimia. Osa printtereistä sopii hintansa puolesta myös kotikäyttäjille. Kotikäyttäjille tarkoitetut mallit maksavat Suomessa halvimmillaan 800 euroa (CEL Robox Home & Student). Tutkielman esimerkkikappaleet on tulostettu MakerBot Replicator 2-tulostimella, joka edustaa kotiprintterien kalliimpaa sarjaa maksaen Suomessa hiukan alle 3000 euroa. Näiden kahden tulostimen väliin mahtuu lukuisia eri valmistajien malleja. Osa on itse kasattavia, osa valmiina käytettävissä suoraan paketista. Tulostimen hintaan vaikuttaa useimmiten se, kuinka tarkkoja tuloksia sillä saadaan ja kuinka suuri on tulostusala. Halvimmissa laitteissa tulostuksen maksimikoko voi jäädä hyvinkin pieneksi tulostusalan pienuudesta johtuen. Kolmas merkittävä tekijä laitteen hinnassa on, voiko sillä tulostaa kerralla yhtä vai kahta eri muovia. Yhdellä tulostuspäällä selviää, mutta mikäli haluaa kahta väriä tai materiaalia samaan kiinteään kappaleeseen, pitää saada kahdella eri suuttimella varustettu tulostin. Tämä luonnollisesti lisää tulostimen hintaa.

Kotitalouksien tulostimet eivät kooltaan juuri eroa normaalin paperitulostimen koosta. Teollisuuskäytössä olevat tulostimet ovat usein huomattavasti suurempia. Erona kotilaitteisiin niiden tulostusjälki on huomattavasti parempaa ja ne myös tekevät parempilaatuisia kappaleita. Parempi laatu ilmenee siinä, ettei tulosteissa ole kappaleen sisällä kohtia, joissa materiaali ei olisi kunnolla kiinnittynyt seuraaviin kerroksiin ja niillä pystytään myös tekemään pienempiä kerroksia. Kotitulostimilla kyetään yleensä käyttämään vain muutamaa eri muovilaatua. Kalliimmat



teollisuuskoneet kykenevät luomaan kappaleita lukuisista eri muoveista, keramiikasta ja metalleista. Jotkut tulostavat vain vahamuotin, jonka avulla valetaan sitten lopullisesti haluttu tuote.

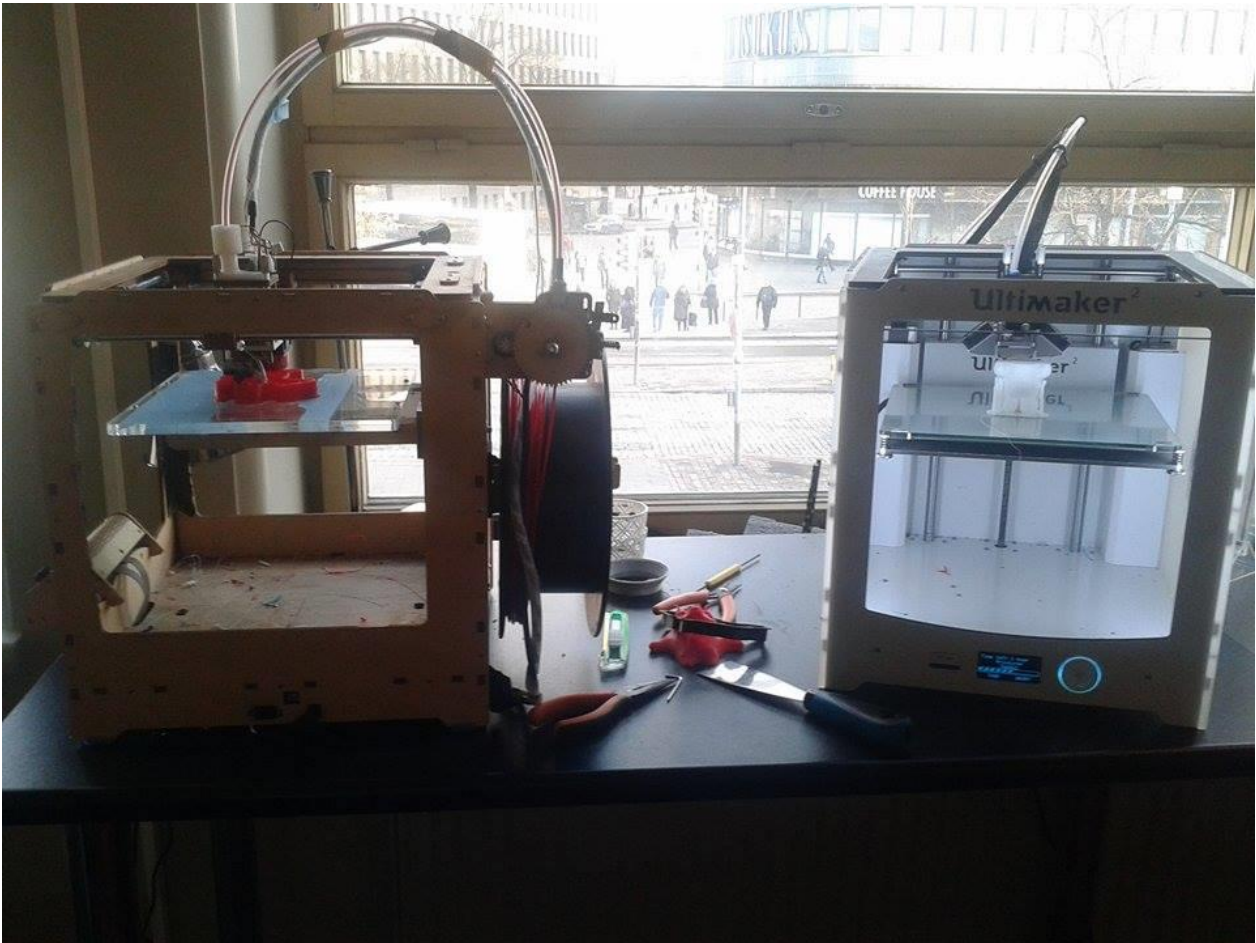
3D-tulostamisen suurin vaikeus liittyy aikataulutukseen. Opettajalta itseltään vie aikaa oppia käyttämään laitetta ja asentamaan se. Ainakin yhden koulussa olevan opettajan tulee osata purkaa ja kasata laite itse, jotta mahdollisista ongelmatilanteista selvittää. Esimerkkilaitteen Ultimakerin rakentaminen kestää keskimäärin kaksi työpäivää. Kun opettaja oppii laitteen käytön, on aika ohjeistaa oppijoita. Mikäli tulostetaan vain valmiita tuotteita, ei aikaa opetteluun mene kuin yksi oppitunti. Mikäli tavoitteena on oppia myös CAD-mallinnusta, puhutaankin jo huomattavasti pidemmästä ajasta. (Canessa 2013).

Koulussa on hyvin vähän mitään käytännön tekemisen muotoja, jotka ovat turvallisempia kuin kolmiulotteinen tulostus. Suurimpia vaaroja on mallintamisessa tuleva tenniskyynärpää ja johtoihin kompastuminen. Mikäli käytetty materiaali muodostaa sulaessaan myrkyllisiä kaasuja, pitää se siirtää erilliseen huoneeseen ja huolehtia hyvästä ilmastoinnista. Tulostimeen ei missään tapauksessa saa koskea tulostamisen yhteydessä. Laitteet ovat yleensä avoimia eikä niissä ole erillisiä suojia estämään koskemista. Käsien laittaminen tulostinpään ja tarjottimen välille voi aiheuttaa palovamman (PLA:n sulamispiste 207celsiusta). Lisäksi laitteen tulostuksen aikana tulostimen tai pöydän liikuttelu saattaa sekoittaa tulostimen suunnistusaistin ja tuote menee tämän vuoksi pilalle. Lisäksi tulosteen liikuttaminen kesken tulostamisen voi pilata valmistusprosessin.

Valmiiden suunnitelmien tulostamiseen on kolme vaihtoehtoa: oma tulostin, kirjaston tulostin tai kappaleen tilaaminen printtituote-yritykseltä. Selkeästi paras tapa tulosteiden saamiseksi on ostaa oppilaitokselle oma tulostin käytettäväksi kaikkien niiden aineiden opetuksessa, jossa se koetaan hyödylliseksi. Tällöin tulostimen käyttö on helppo integroida opetukseen, eikä matkustamiseen paikkojen välillä tarvitse käyttää aikaa. Mikäli haluttu kappale tulostuu yli oppitunnin ajan, voi laitteen vain laittaa aamulla tekemään tulostetta ja oppija voi hakea tekemänsä tuotteen välitunnin aikana.

2000-luvun kirjastot ovat ottaneet palveluihinsa muun muassa suksien ja lelujen lainaamisen kirjojen lisäksi. Ainakin Helsingin ja Espoon kirjastoilla on muutamia 3D-tulostimia, joita voi kuka tahansa käyttää pelkän materiaalimaksun hinnalla. Kirjoitushetkellä muoviesineen tulostaminen Helsingin "Kaupunkiverstaassa" maksoi 40 senttiä. Kirjastossa on myös osaava henkilökunta

auttamassa tulosteen saamisessa valmiiksi. Kirjastossa tulostamisen ongelmana on, että oppijoiden pitää käytännössä hoitaa tulostusvaihe kokonaan oppilaitoksen ulkopuolella ja todennäköisesti täysin omalla ajallaan.



Kuva 1. Kaupunkiverstaan Ultimaker 1 ja Ultimaker 2 tulostimet

Oppilaitoksissa onnistuu hyvin kappaleiden tulostaminen, jotka ovat alle 25 cm korkeita, 16 cm pitkiä ja 15 cm leveitä (MakerBotin maksimitulostusalue). Tulostusalueen koko vaikuttaa usein ostetun laitteen hintaan. Mikäli kappale on suurempi kuin tulostimen suurin alue, pitää se joko hajottaa osiksi ja tulostaa erikseen tai tilata yritykseltä, jonka laitteisto kykenee luomaan suurempia tuotteita.

3D-tulostin toimii käyttäjän luoman CAD (computer aided design)-mallin mukaisesti. Malli luodaan joko skannaamalla erityisellä skannerilla jo olemassa olevaa tuotetta, tai luomalla tietokoneella käytettävällä mallinnusohjelmalla. Mallinnusohjelmia on erilaisia eri käyttäjiä varten. Osa ohjelmista on maksullisia osan ollessa ilmaisia opetuskäytössä. Monet tulostimet tarjoavat omaa ohjelmistoaan oston yhteydessä. Ohjelmilla on myös eroja, esimerkiksi selainpohjainen Tincercad ja ladattava SketchUp soveltuvat hyvin perustason käyttäjälle, jolle riittää vain

yksinkertaisten kuvioden avulla toimiminen ja niiden avulla suurempien kokonaisuuksien tekeminen.

Yksi 3D-tulostamisen eduista on sen ympäristöystävällisyys. Perinteinen tuotanto perustuu ison kappaleen hajottamiseen ja siitä pienempien, haluttujen kappaleiden löytymiseen. Tulostaessa jätettä tulee ainoastaan, mikäli halutaan käyttää tukia kappaleen pitämiseksi paikallaan tai halutaan luoda kaaria ja aukkoja, jolloin niiden yläpuoliset osat tarvitsevat erityisen tuen. Tulostaminen ilmaan ilman jotain lähtöalustaa on mahdotonta kerroksittaisessa valmistuksessa. Mikäli ihmiset aloittavat hankkia pienet muoviesineensä paikallisesta tulostusfirmasta tai tulostavat ne itse, tarvitsemme vähemmän kuljetuskilometrejä samoille esineille. Lisäksi tuotteisiin ei kulu valtavaa määrää kuljetusjätettä. Materiaali kulkee hyvinkin pienissä paketeissa suhteessa siihen, kuinka paljon muovia ja pahvia kuluisi vastaavan määrän pienesineitä lähettämiseksi vaikkapa Aasiasta.

Techfortrade järjesti kilpailun parhaan ympäristöystävällisen 3D-tulostuskeksinnön saamiseksi. Voittaja kehitti metodin muuntaa normaalia kotitalousmuovijätettä tulostimien käytettäväksi materiaaliksi. Normaalisti ihmiset kykenevät kierrättämään ainoastaan valmiiksi tulostuskelvollista muovia. Projektin ongelmana oli, että vain tietyt muovilaadut kelpasivat. Pidemmälle vietyinä projektin tavoitteena on löytää sellainen konsepti, jolla kehitysmaissa voitaisiin tehdä mistä vain muovista valmista materiaalia ja tuottaa siitä yhteisöjen tarvitsemia hyötyesineitä, pelkkien sähkökustannusten hinnalla. (Canessa 2013)

Toinen projekti kierrätysmateriaaleihin liittyen oli “Perpetual Plastic Project”, jossa festivaaleilla sai tuoda käyttämiään muovimukeja sulatettavaksi ja niistä sai tehdä omia personoituja koruja. (Canessa 2013). Samaa tekniikkaa käyttämällä voisi halutessaan yhdistää ympäristötietoa ja käyttää ilmaista materiaalia hyväksi muiden oppituntien tulostustöistä. Tämä myös lisäisi laitteen käyttöarvoa, sillä sen avulla ei tarvitsisi erikseen ostaa koululle kuin yksi tulostin, jota voitaisiin käyttää useammassakin eri oppiaineessa.

## **2.2 Tulostusmenetelmät ja materiaalit**

3D-tulostamisessa käytetään yleisimmin kahta eri menetelmää, FDM:iä ja stereolitografiaa. Ylivoimaisesti yleisin tulostusmenetelmä on FDM, “fused deposition modeling”. FDM:ssä joko tulostinpää liikkuu tarjottimen päällä tai tarjotin liikkuu tulostinpään alla 3D-mallin määrittämien sääntöjen mukaisesti. Tulostinpäässä sulatetaan rullasta tulevaa muovia, jota laitetaan kerroksittain

tarjottimelle. Liikkuva osa liikkuu x-,y- ja z-akselien varassa portaattomasti. Kerrosvahvuus voidaan itse määritellä, ja siitä riippuu haluttu tulostustarkkuus. Kerrosvahvuuden mukaan määräytyy myös tulostusaika. 0,2millimetriä paksulla tulostuskorkeudella saadaan aikaan usein riittävän hyvä ja nopea tuloste. Mitä paksummat kerrokset, sitä nopeampi ja muhkuraisempi on tulostustyö. Mitä pienemmät kerrokset, sitä sileämpi tulos saadaan.

Useimmissa tulostimissa pystytään myös päättämään, kuinka paljon kappaleeseen tulee täytettä. Useimmiten on hyödyllistä toteuttaa kappaleet onttoina materiaalin säästämiseksi. Mikäli tarvitaan kestävyyttä, pitää sisälle laittaa vaihteleva määrä täytettä. Käyttämässäni tulostimessa tämän sai määritellä itse prosentteina, ja laite itse laskee sopivan täytekuviota. Useimmat FDM-koneet toimivat muoveilla, mutta siitä on olemassa myös metallia tulostavia versioita.

Useimmissa kotikäyttöisissä malleissa tulostusalue on korkeintaan 20 cm x 20 cm x 20 cm. Kalliimmissa teollisuuskäyttöisissä laitteissa tulostusalueet voivat olla myös huomattavasti isompia. (Canessa 2013). Osassa laitteissa on kaksi tai enemmän tulostuspäitä ja niillä voi samaan kappaleeseen saada useampaa eri materiaalia ja eri värejä. Osa laitteista myös yhdistää CNC-koneistuksen ja tulostamisen, jolloin ensin tulostettuun malliin varmistetaan oikeanmuotoinen sileä pinta tulostamisen jälkeen.

Toinen yleisesti käytössä oleva tekniikka on stereolitografia eli laser-sintraus. Laser-sintrauksessa materiaali on hienona jauheena tai nesteinä tulostinpöydällä, ja se kiinteytetään kappaleeksi laserin avulla. Kerroksen jälkeen lisätään seuraava kerros jauhetta kappaleen päälle, ja laser muuttaa taas halutut kohdat kiinteiksi. Tämä tekniikka on erityisesti käytössä metallikappaleiden kanssa. Hyvänä puolena sintrauksessa on, ettei siinä tarvita erillisiä tukirakenteita. Ylijäänyt jauhe/neste pitää kappaletta pystyssä tulostuksen aikana. Tämä jättää kokonaan pois tukimateriaalien poistamisen, joka metallien kanssa saattaisi pilata tuotteen ulkonäköä ja ainakin vie aikaa. Ylijäänyt materiaali on myös käytettävissä seuraavissa töissä, eli yhtään materiaalia ei mene siinä mielessä hukkaan. (Canessa 2013)

Tulostukseen voi muokata materiaaliksi käytännössä mitä vain, jonka saa sulamaan ja normaalissa huoneilmassa kiinteytymään uudelleen. Normaalien harrastajien ja luokkahuoneiden kannalta tällä hetkellä järkevin ratkaisu on kuitenkin käyttää muovitulostimia, joita kaikki alle kahdentuhannen euron laitteet ovat tänä päivänä. Muovit ovat halpoja ja tulostimiin sopiva kerällä oleva muovi, niin kutsuttu filamentti, maksaa noin 30 e/kg. Kun ontot tulosteet painavat vain joitain grammoja, on

tekniikan käyttö jopa opettajan materiaalibudjetin sisällä. Näin on, koska opettaja voi luopua kokonaan kalliiden valmiiden mallikappaleiden ostamisesta ja tulostaa ne itse käyttöä varten joko valmiista materiaalipankeista tai mallintaa itse. Filamenttia voi pääasiallisesti ostaa kahdessa koossa 1,75 mm tai 3,0 mm paksuna.

Nykyään yleisimmät vaihtoehdot tulostukseen ovat PLA- tai ABS-muovit. PLA tehdään maissin tärkkelyksestä, ja se on täysin luontoon hajoavaa, eikä sisällä mitään myrkyllisiä aineita. Lisäksi sen sulamisessa tuleva höyry ei ole ihmiselle vaarallista. PLA kiinteytyy ongelmitta huoneenlämmössä ja tulostustilassa mahdollisesti läsnä oleva veto tai ihmisten liike ei merkittävästi pilaa tulostuslaatua. Materiaalina se on kuitenkin haurasta, eikä sovellu kestävyyttä vaativiin projekteihin kuten varaosiin. PLA toimiikin hyvin prototyyppeihin ja leluihin, joihin ei kohdistu kovaa rasitusta. Sitä saa Suomessakin monesta eri kaupasta eri väreissä, myös pimeässä hohtavana. (Canessa 2013)

ABS-muovi on toinen yleensä käytetty materiaali. Se on huomattavasti PLA:ta kestävämpää ja sitä käytetään muun muassa Lego-palikoiden ja 3D-tulostimien osien valmistuksessa. Hinnaltaan ABS on samalla tasolla kuin PLA, mutta sitä kuluu enemmän, sillä useimmiten siitä tehdyt kappaleet eivät ole onttoja kestävyuden vuoksi. ABS ei ole yhtä ympäristöystävällistä kuin PLA. Se on öljypohjainen ja tulostettaessa on tärkeää huolehtia hyvästä tuuletuksesta, sillä sulatuksessa tulevat kaasut voivat olla terveydelle haitallisia. ABS-muovia ei voi myöskään käyttää aivan kaikissa kotitulostimissa, sillä se vaatii erityisen lämmitettävän tarjottimen, jotta muovi kiinteytyisi oikealla tavalla. Mikäli tulosteet kuitenkin tehtäisiin ilman tarjotinta, tulisi tulosteeseen todennäköisesti kohtia, jossa kerrokset eivät olisi kiinni toisissaan halutulla tavalla. Myös ABS-muovia saa useana eri värinä. (Canessa 2013) Tällä hetkellä opetuskäytössä onkin hyvä suosia PLA:ta materiaalina aina kun se on mahdollista ja tehdä tuotteet ontoiksi.

Osa tulosteista epäonnistuu väärrien lämpötilavalintojen ja puuttuvien tukirakenteiden takia. Nämä ongelmat vältetään noudattamalla tulostimessa ja muovikerässä olevia ohjeita ja kokeilemalla omaan tilaan ja tulosteisiin sopivin lämpötila, nopeus ja kerrospaksuus. Useimmiten laite kalibroidaan luokkahuoneessa siihen tilaan ja lämpöön sopivien speksien mukaiseksi, jonka jälkeen lähtökohtaisesti kaikki tulosteet onnistuvat tasalaatuisina. On myös mahdollista hankkia materiaalin kierrätyskone, joka sulattaa vanhat epäonnistuneet ja turhiksi jääneet työt sekä käytetyt tukimateriaalit uudelleen käytettävään muotoon. Hyvinkin pian voi olla mahdollista tehdä materiaalia jopa normaalista muovijätteestä. Eri materiaalit ja eri tulostimet toimivat hiukan eri tavoilla. Useimmissa printtauspäissä sulatetaan muovia ja se asetetaan nauhamaisena

printtialustalle. Muita tapoja on muun muassa kerroksittain sulattaminen tai kiinteyttäminen. Jotkut tulostimet jopa hitsaavat kerroksia kerroksen perään.

### **3 KASVATUSTIETEELLISIÄ NÄKÖKULMIA MATEMATIIKAN OPETUKSEEN**

Perinteinen tapa opettaa matematiikkaa perustuu opettajajohtoiseen toimintaan, jossa opettaja on luokkahuoneen edessä ja oppitunnilla on selkeä kolmiosainen rakenne. Kolmiosainen oppitunti koostuu läksyjen tarkistuksesta, uuden asian esittelystä ja lopputunnilla tapahtuvasta laskemisesta. Hyvä oppitunti sisältää lisäksi jotain havainnollistavaa ja paremmin asiaan johdattelevaa kuin liitutaululle ilmestyvää matemaattista kaavariviä. (Frondelius 2014.) Tämä opetustapa on toimiva, mutta pidemmällä tähtäimellä oppijalle tylsä ja virikkeetön. Lisäksi opetustapa ei huomioi ollenkaan opetussuunnitelman perusteistakin löytyvää vaatimusta laajasta teknologian käyttämisestä opetuksessa. Matematiikan abstraktien sisältöjen oppimiseksi on tärkeää käyttää kattavasti erilaisia havainnollistavia menetelmiä. Havainnollistamisessa on tavoitteena konkretisoida haluttua asiaa piirroksin ja erilaisin välinein. Nämä välineet voivat olla mitä vain fyysisiä tai kuvattuja objekteja. (Ahtee 2000.)

Motivaatio on kaiken oppimisen perusta (Lavonen 2010). Matematiikantunneilla oppijat esittävät usein kysymyksen “mihin ihmeeseen tätä tarvitaan”. Useimmat oppilaat ymmärtävät matematiikan olevan perustana tulevalle osaamiselle ja perustana heidän tulevaisuuden suunnitelmillensa. Kuitenkin osa oppijoista ei näe koulumatematiikkaa mitenkään itselleen relevanttina osana tulevaisuutta. Näiden oppilaiden mielenkiinnon herättäminen on erityisen tärkeää kahdestakin syystä. Ensimmäinen on heidän omat tarpeensa. Mikäli he eivät saavuta riittävää tasoa matematiikan osaamisellaan, niin heillä voi olla vaikeuksia päästä haluamiinsa jatko-opiskelupaikkoihin tai heillä voi olla vaikeuksia tulevaisuuden työpaikoillaan. Toisena ongelmana on heidän aiheuttamansa kuormitus oppitunneille. Epämotivoituneiden oppilaiden motivointi vie aikaa siltä osalta luokkaa, jolla olisi halua oppimiseen.

#### **3.1 Matemaattinen oppiminen**

Matemaattiset peruselementit, kuten suorat, pisteet ja viivat, ovat vastineita todellisista kohteista. Oppilaan tiedot rakentuvat ympäristön manipuloimisella, ja varmuus tiedon oikeellisuudesta saavutetaan omien kokemusten kautta. Oppilas voi koota tietonsa ulkoa oppimalla, jolloin tiedot voivat jäädä hyvinkin pinnallisiksi. Mikäli opettaja haluaa oppijoiden oikeasti oppivan, mitä

matematiikassa tapahtuu, on tärkeää, että ulkoa opittavien pirstaletietojen sijaan etsittäisiin asioille perusteita. Oppijoiden ei kuitenkaan ole mahdollista verifioida kaikkea koulussa saamaansa tietoa omien kokemustensa kautta. Tällainen tieto on toisen tason tietoa ja se perustuu aiemmin opitun tiedon yhdistämiseen uuden tiedon saamiseksi. Oppijoiden olisi hyvä oppia ymmärtämään matemaattisten asioiden rakentumista helpommilla asioilla, jotta he kykenisivät myöhemmin verifioimaan myös pidemmälle viedyn matematiikan oikeaksi, ja täten heidän koko matemaattinen mallinsa ei olisi vain kasa pirstoutunutta ulkoa muistamista. (Räsänen 2008.)

Kaikki olemassa oleva matemaattinen tieto on kehitetty erilaisissa asiayhteyksissä jonkun henkilön toimesta, joka on ajatellut asiaa kiinnostuksen tai käytännöllisen ongelman vuoksi. Kun löydetyt asiat yleistetään, unohtuu niistä usein asiayhteys ja tieto muuttuu pelkäksi puhtaaksi tulokseksi. Mikäli matematiikanopetuksessa ei kyetä ottamaan huomioon kontekstia, se saattaa johtaa oppijat käsitykseen, että matematiikka on pelkkää jäykkää ulkoa opittavaa teoriaa. Matematiikanopetuksen yleinen tavoite on saada oppijoille käsite elävästä matematiikasta, jota käytetään apuna erilaisten ongelmien ratkaisemiseksi. Elävän matematiikan saaminen oppijoiden mieliin vaatii lähtökohdaksi oppijoiden omien kiinnostuksen kohteiden ottamista opettamisen perustaksi. Näin saadaan parhaalla tavalla oppijoiden tietorakenteet rakentumaan oppijoiden parhaan potentiaalin ja mahdollisuuksien mukaiseksi. (Räsänen 2008.)

Erityisesti matemaattis-luonnontieteellisissä oppiaineissa voidaan oppiminen jaotella Bloomin taksonomian mukaisesti ajatusten eritasoisille asteille, joita kaikkia opetuksessa tulisi herätellä. Bloomin taksonomia jakaa ajattelun kuudelle asteelle, jotka ovat 1.) muistaa, 2.) ymmärtää, 3.) soveltaa, 4.) analysoida, 5.) arvioida ja 6.) luoda. Hyvä opetus ja hyvään opetukseen liittyvien tehtävien tulisi sisältää kaikkia kuutta ajattelun tasoa herätteleviä osia. Kaikki lähtee ajattelun matalammilta tasoilta muistaa ja ymmärtää. Kaikki tiedon käyttö perustuu niihin. Ajattelun korkeammat asteet: soveltaa, analysoida, arvioida ja luoda aiheuttavat oppijoissa parempia tuloksia ja syvällisempää asioiden ymmärrystä, mutta niitä ei kuitenkaan aina löydy kaikista tehtävistä. (Aksela 2005.) Perustason opetus sisältää vain ensimmäistä kahta ajatuksen astetta, mutta myöhemmin pitäisi päästä tasoille 3-6, joilla todellinen oppiminen tapahtuu. Taksonomiassa asteet muistaa ja ymmärtää ovat asioita, joita tarvitaan aina seuraavien asteiden saavuttamisessa. Niihin kuuluu esimerkiksi kaavan muistaminen ja käyttötavan ymmärtäminen. Hyvän oppilaalle annettavan tehtävän tulisi sisältää ajattelun asteita 3-6, sillä hyödynnettäessä näitä taitoja tapahtuu todellista oppimista.



### 3.2 Matemaattinen ajattelu

Matemaattinen ajattelu ei tarkoita matematiikan sisältöjen ja tekniikan miettimistä. Kyseessä ei ole matematiikan ajattelu, vaan matemaattinen ajattelu. Se on enemmänkin tietynlainen ajattelun tyyli, joka muodostuu vuorovaikutuksessa, jossa dynaamisesti yhdistyvät matemaattiset operaatiot ja prosessit. Matematiikka eroaa tieteenä muista siitä, että matematiikassa käsitellään useimmiten asioita, jotka voidaan varmistaa olevan tosia. Matemaattisen tiedon voidaan sanoa olevan kirjatietaa, joka perustuu tosiasioihin, sitä vastoin että se olisi sosiaalista tietoa, jota on hankittu kokemusten perusteella. Kuitenkin, kun oppija löytää matematiikan ja kokemuksellisuuden yhdessä, kykenee hän pidemmälle vietyyn matemaattiseen ajatteluun. Soveltaminen vaatii matematiikan rakenteiden ymmärrystä. Matemaattista tietoa voi ajatella algoritmisena ja refleктоivana. Algoritminen ajattelu koostuu taitotiedosta ja refleктоiva ajattelu koostuu pohdiskelusta. Algoritmisen ajattelun erityispiirteenä on suorittava ajattelu. Siinä lauseet nähdään kirjaimina ja lukuina, joille tehdään sääntöjen mukaan erilaisia toimenpiteitä. Refleктоivassa ajattelussa keskitytään enemmän pohtimaan, mitä on tapahtunut ja ovatko toimitukset olleet järkeviä ja johdonmukaisia. (Räsänen 2008.)

Matemaattisen ajattelun voi David Tallin (2013) mukaan jakaa kolmeen osaan:

1. ”Käsitteellis-ruumiillinen/ilmenevä maailma (conceptual-embodied)
2. Proseptuaalis-symbolinen maailma (proceptual-symbolic) ja
3. Aksioomaattis-formaali maailma (axiomatic-formal).”

Ensimmäistä maailmaa voi kutsua yksinkertaistettuna myös ilmeneväksi maailmaksi, toista symboliseksi ja kolmatta formaaliksi. Ilmenevä maailma on matemaattisia ilmiöitä nähtynä esimerkiksi esimerkkikuvan avulla. Kaksi omenaa + yksi omena on kolme omenaa. Symbolisessa maailmassa ei enää puhuta omenoista vaan luvuista ja kirjaimista. Niiden käsittelyllä saatetaan saada jo aikaan aktuaalisia matemaattisia ideoita kokeilemalla. Kolmas maailma, formaali maailma, toimii matemaattisten aksioomien perusteella, joista deduktoidaan uutta tietoa. (Hannula 2014.)

### 3.3 Matemaattinen hahmottamiskyky

Oppija liittää tietorakenteeseensa käsitteitä, kun hän saa opetusta, jossa itse kokee olevan järkevä sisältö. Matematiikka on tulos ihmisen ajattelusta tämän ja se voidaan hahmottaa siten, että pienetkin osaset ovat matematiikassa oikein. Hahmottamisen pulmallisuutta edustaa se, että tietorakenteita ei voi siirtää opettajalta oppijalle, vaan jokaisen on ne itse itselleen luotava. Oppija ei yleensä kykene itse konstruoimaan näitä rakenteita, vaan hän tarvitsee opettajan tai oppikirjan apua. (Räsänen 2008.) Usein oppilaat kokevat, että ainoastaan matemaattisesti nerot ihmiset kykenevät luomaan tai kehittämään matematiikkaa. Heidän mukaansa tavallisten ihmisten kykyihin riittää ainoastaan sen muistaminen ja käyttäminen. Matematiikan koetaan pahimmillaan olevan vain asia, jota opetetaan koulussa vain matematiikanopettajien työllistämisen takia. (Ahtee 2000.)

Matemaattinen tieto koostuu tarkoista faktoista. Erilaiset käsitteet määritellään tarkasti ja niistä saadaan tarkat perustat matemaattisille teorioille. Tosiasiassa kuitenkin asia ei ole näin, vaan jokaisella ihmisellä on henkilökohtaiset käsitekuvat asioille. Ihminen kohtaa matematiikkaa elämässään erilaisin tavoin ja luo itselleen näiden kohtaamisten perusteella matemaattisten käsitteiden kuvaston. Nämä ihmisten omat kuvastot sisältävät vaihtelevia tietoja, jotka kehittyvät hitaasti toivottavasti kohti oikeaa määriteltyä matematiikkaa. Usein kuitenkin ihmisille muodostuu vääristymiä matemaattiseen käsitekuvaan, ja näiden niin kutsuttujen miniteorioiden kanssa opettajat joutuvat päivittäin työskentelemään. Esimerkkinä hyvin yleisestä miniteoriasta oppijat usein ajattelevat, että koska  $2^2=2 \times 2=4$ , niin myös  $2^3=2 \times 3=6$ . He eivät ole ymmärtäneet potenssilaskun ideaa, joten he noudattavat samaa sääntöä, joka pätee yksittäisiin laskun erikoistapauksiin. (Tall 1981.)

Tall & Vinner (1981) käyttävät termiä käsitekuva kuvaamaan sitä täyttä kognitiivista järjestelmää, joka liittyy nimenomaiseen käsitteeseen. Tämä käsite sisältää ihmisen asiaan liittyvät mielikuvat, prosessit ja ominaisuudet. Käsitekuva on struktuuri, joka on kehittynyt ihmiselle kaikkien asiaan liittyvien käsitteiden kohtaamisten ja muiden stimulointien avulla. Koska ihmiset muodostavat nämä omat käsitekuvansa itse, sisältävät ne myös paljon virheitä. Oikeaoppisempia käsitekuvia on helpompi rakentaa, mikäli matematiikka siirtyy pois lukujen maailmasta ja siirtyy olemassa olevaan maailmaan. Käytännön esimerkit helpottavat ymmärtämään matematiikassa usein vaikeaksi koettua käsitteellisyttä. Kouluissa oppijoilla on harvoin ajatustakaan siitä, mitä mikäkin matemaattinen asia oikeasti tarkoittaa ja miten parametrien muuttaminen muuttaa erilaisia laskutoimituksia. Myös

pidemmälle menevässä matematiikassa kyetään mallinnuksen avulla muokkaamaan vaikeankin muotoiset kuvaajat ymmärrettäviksi kappaleiksi, joiden kokoa ja muotoa pystytään sitten muuttamaan pienillä parametrien muutoksilla.

## 4 3D-TULOSTAMINEN JA MALLINTAMINEN LUOKKAHUONEESSA

Kuvat ja esineet auttavat huomattavasti siirtämään intuitiota tuloksiksi ja ideoiksi. Visualisaatio on erityisen tärkeää opetuksessa ja se auttaa merkittävästi uusien asioiden oppimisesta. Lisäksi visuaaliset objektit auttavat esittämään matematiikan kauneutta ja matemaattisia ideoita ihmisille, jotka kokevat etteivät matematiikkaa ymmärrä. Niiden avulla saadaan uusia ideoita, teoreemia, ja ne voivat auttaa normaalissakin laskemisessa. Visualisoitu ja konkretisoitu matematiikka auttaa muokkaamaan ihmisten käsitystä siitä, että matematiikka olisi pelkkiä kaavoja, eikä mitään konkreettista. Vaikka tietokoneen näytöltä voidaan näyttää näitä malleja, ei mikään silti voita paljaissa käsissä olevaa esinettä, jonka saa 3D-tulostimen avulla hyvinkin helposti. (Canessa 2013.)

Kolmedimensionaalinen tulostaminen lähtee liikkeelle mallien luomisesta symbolisessa maailmassa. Joissain tilanteissa niiden tekeminen onnistuu myös suoraan formaalien kaavojen kautta. Näissä tapauksissa päästään suoraan käsittelemään ja muokkaamaan usein oppijoille vaikeampia asioita, parhaassa tapauksessa niistä jopa aloittaen. Vasta työn lopuksi saadaan ilmenevän maailman esineitä tai kuvia esineistä. Tätä ennen on pitänyt itse luoda, minkä formaalien ja minkä symbolisten yhdistelmänä haluttu kappale voidaan luoda. Funktioiden rajapintoja ja vastaavia voidaan havainnollisesti tutkia, kun niiden kuvaajia printtaa. Niiden tutkiminen käsin paperilla tai edes tietokoneen näytöltä ei mitenkään korvaa käsin kosketeltavuutta. Kolmiulotteinen tuloste toimii matematiikan kolmessa maailmassa ilmenevänä maailmana ja se on saatu aikaiseksi käyttämällä kahta seuraavaa. Tämä siirtyminen oikean maailman ongelmasta käsitteelliseen ja formaaliin ratkaisuun ja palaamisesta lopulta ilmenevän maailman ratkaisuun on matematiikassa poikkeuksellisen hieno asia, jota ei usein oppimisessa pääse kohtaamaan. Vastaus saattaa olla joissain tehtävissä muutettava pelkästä luvusta yksi yhdeksi autoksi. Se ei kuitenkaan anna vastauksena läheskään samaa oivallusta kuin aito kappale.

Kun oppijoiden taidot kasvavat, mallintamista ja tulostamista voi toteuttaa koko ajan monimutkaisempien objektien kohdalla. Mikä parasta, tulostin kykenee toteuttamaan kappaleen yhtä hyvin, oli se kuinka monimutkainen tahansa. Ainoa rajoittava tekijä on käyttäjän oma luova mieli ja tietotekniikkataidot. (Slavovsky 2013.) Helpoimpien mallinnusohjelmien kanssa myöskään huonoista tietotekniikkataidoista ei juurikaan synny ongelmia. Parhaassa tapauksessa oppijat osaavat peruskoulun jälkeen seuraavassa oppilaitoksessa valmiiksi mallintaa, jolloin 3D-

mallintaminen ja tulostus mahtuisivat myös lukion tai ammatillisten oppilaitosten peruskoulua tiukempiin aikatauluihin.

Yleensä geometrian opetuksen yhteydessä paperille piirrettävät osiot ovat oppilaille helppoja ymmärtää. Kolmiot neliöt ja ympyrät ovat helppoja havainnoida paperille piirrettyinä. Hahmottamisongelmat tulevat vastaan vahvemmin tultaessa kolmiulotteisiin kappaleisiin. Kolmiulotteisten kappaleiden ymmärtämiseen tarvitaan erilaista avaruudellista hahmotuskykyä. Hahmotuskykyä olisi helppo parantaa käsin tekemällä, mutta valmistusvälineet ovat usein kädentaitoja vaativia, ja tästä syystä nuorille huomattavan hankalia. Tietokonemallinnuksen avulla kyetään kuitenkin luomaan hyvinkin vaikeita muotoja ilman, että oppijan tarvitsee itse osata käsillään juuri mitään ja vailla mahdollisuutta vahingoittaa itseään. Tietokone noudattaa annettuja käskyjä joko graafisessa tai aksiomaattisessa muodossa. Slavkovsky (2013) väittää, että tiedonmuodostaminen paranee 20 % osaamisesta 90 % osaamiseksi, kun oppijalla on konkreettinen, eikä abstrakti kontakti asiaan. Mallinnus parantaa tiedonmuodostamista, sillä se antaa kappaleet sellaisina, kuin ne oikeasti ovat. Myös yhteys kaavan ja todellisuuden välille muodostuu paremmin, kun niitä kykenee katsomaan vierekkäin ja vertailemaan.

Fyysiset mallit ovat tärkeitä käytännöllisessä, aktiivisessa oppimisessä. Erityisesti pidemmälle menevässä opetuksessa tulee ottaa käyttöön kehittyneemmät algebralliset mallinnusohjelmat. Niillä luodaan haluttu matemaattinen muoto, johon sitten erillisellä käsittelyohjelmalla luodaan tulostettavat pinnat. Täydellisillä matemaattisilla aksiomaattisesti luoduilla kappaleilla ei aina ole seinien paksuuksia, vain kasa pisteitä. (Canessa 2013.) Oikeasti kädessä pidettävät mallit parantavat huomattavasti korkeamman matematiikan oppimista. Usein opiskelijat eivät ymmärrä mitä tapahtuu, jos puhutaan vain kaavojen maailmasta. Tulostin kuitenkin tuo vaikeatkin kuvat käteen tutkittaviksi, ja näin päästään pohtimaan niiden ominaisuuksia. Voisiko ylioppilaskokeeseenkin luoda tehtävän, jossa pohdittaisiin mieluummin aidon kappaleen matemaattisia ominaisuuksia sen sijaan, että käytettäisiin ainoastaan paperilla ilmenevää matematiikkaa.

Monimutkaisempia matemaattisia kappaleita haluavan on hyvä käyttää esimerkiksi Mathematicaa, jolla pystytään muuttamaan kaavoja kolmiulotteisiksi kuviksi. Mathematican kanssa toimiessa pitää erikseen huomioida se, että seinillä on olemassa paksuus. Tulostin ei osaa tehdä mitään, joka ei ole mitattavan kokoinen. Mathematican tapauksessa malleihin yleensä lisätään jokaiseen pisteeseen ympyrän muotoinen taso, jonka jälkeen kappaleen rakenne tulee muodostumaan halutun kokoisista

tangoista. Malli tulee kuitenkin vielä tarkistaa ja kahden suoran välille laittaa vielä pallot, jottei tyhjiä kohtia muodostuisi. (Segerman 2014)

Mathematicaan tehdyllä komentorivillä

```
"F[u_, v_] := {(Cos[u] + v*Cos[u/2]*Cos[u]),  
(Sin[u] + v*Cos[u/2]*Sin[u]),  
v*SIN[u/2]}  
MobiusStrip = ParametricPlot3D[{F[u, v]}, {u, 0, 2 Pi}, {v, -.3, .3},  
PlotStyle -> Thickness[.1]]" (Taalman 2014)
```

voidaan luoda Möbiuksen nauha. Ensimmäisellä kaavarivillä määritellään muuttujiksi  $u$  sekä  $v$ .

Tämän jälkeen Möbiuksen nauhan kaavan kuva muodostetaan sinin ja cosinin avulla.

Loppukaavassa on kuvion muotoon ja seinämiin liittyviä ohjeita.



Kuva 2. Mathematican avulla luotu ja itse tulostettu Möbiuksen nauha

Ohjelman avulla luodaan tietokoneelle kolmiulotteinen malli. Tämä malli siirretään jonkun tulostimelle sopivan matriisin läpi, joka hajottaa sen halutun kerrospaksuudenmukaisiksi liikeradoiksi. Tulostin aloittaa tulostamisen näiden kaksiulotteisten karttojen mukaisesti, ja haluttu tuote ilmestyy tulostinalustalle kerros kerrallaan. Mitä tarkempaa lopputulosta halutaan, sen useampaan osaan tulee osa jakaa. Lopulta irrotamme tarjottimelta valmistamamme tuotteen ja irrotamme siinä mahdollisesti olevat tukirakenteet.

Valmiita tuotteita saa monesta eri lähteestä internetistä. Esimerkiksi tämän tutkielman ymmärtämiseen on ladattu ja tulostettu esineitä Thingiversen ja Grabcadin valikoimista. Kolmiulotteiseen mallinnukseen liittyy valtava joukko ihmisiä, jotka luovat omaksi huvikseen tai hyödykseen malleja, joita sitten jakavat maksutta muiden käyttäjien muokattaviksi tai tulostettavaksi. Thingiversestä löytyy valmiina muun muassa Platonin kappaleet ja useiden

matemaattisten teorioiden fyysiset todistukset. Esimerkiksi Pythagoraan lauseelle löytyy useampikin erilainen tulostettava hyvin havainnollistava todistus. Mielenkiintoisimpana seikkana osa harrastajista jopa jakaa malleja oman tulostimen tekemiseksi. Tämä vapaasti jaettavan tulostimen kehitystyö on jopa oma harrastuksen muotonsa. Halutessaan tulostimen hankkiminen itsetulostettavista osista on halvin vaihtoehto, mikäli aikaa löytyy riittävästi. Näitä erilaisia valmiita suunnitelmia on kätevää ottaa opetuskäyttöön, mikäli aikaa itse mallintamiseen ei olisi.

#### **4.1 Opetussuunnitelman perusteita 3D-tulostuksen käytölle**

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa määritellään, että opetukseen pitää kuulua Ihminen ja teknologia-aihekokonaisuus. Kokonaisuudesta vaaditaan, että oppilaan tulee ymmärtää ihmisen suhde teknologiaan ja kyetä näkemään teknologian ja arkielämän välinen merkitys. Opetuksen tulee sisältää perustiedot teknologian kehittämisestä sekä vaikutuksista ja opastaa teknologian käyttämistä. Laitteiden perusteita tulee myös osata. Oppilaan tulee oppia käyttämään teknologiaa, ymmärtää teknologian toiminta nyky-yhteiskunnassa sekä myös tulevaisuudessa. Oppilaan tulee osata sopivien työkalujen käyttö sekä omata tarvittavaa tietotekniikkaosaamista (POPS). Näistä 3D-tulostaminen on selvästi tulevaisuuden ja tämän hetken teknologia.

Matematiikan opetuksen tehtävänä peruskoulussa on mahdollisuuksien tarjoaminen matemaattisen ajattelun kehittämiseksi. Oppilaiden luovia ajatuskykyjä tulee kehittää ja heidän ongelmanratkaisukykyään parantaa. Konkreettisuus on tärkeää ja se on tärkeä apuväline abstraktin matematiikan oppimiseksi. Myös arkipäivän tilanteisiin kuuluu kyetä vastaamaan matemaattisin keinoin. Tieto- ja viestintäteknikkaa tulee käyttää oppimisprosessissa. (POPS). Nämä kaikki ovat nähdäkseni asioita, joissa mallinnus ja tulostaminen ovat ensiarvoisen toimivia. Geometristen asioiden luominen arkipäivän tilanteiden helpottamiseksi on mitä parhain tapa konkretisoida matematiikkaa. Nyt pystymme käsittelemään puhtaasti teorian kautta käytännön ongelmaa ja saamaan siihen fyysisen ratkaisun. Ongelmien fyysinen ratkaisu tulee suoraan koneesta ja sen toimivuus pystytään verifioimaan siitä. Kuitenkin tärkein vaihe, eli suunnitteluvaihe, on prosessin tärkein osa, ja 3D-mallinnuksessa suunnitelma on itseasiassa eniten aikaa vievä vaihe. Tulostimen voi jättää toteuttamaan itse esinettä takahuoneeseen koulupäivän ajaksi muita asioita käsiteltäessä. Mallinnus on puhtaasti ongelmanratkaisua, jossa pystytään menemään koko ajan eteenpäin. Lisäksi tässä pystytään viimein käyttämään tieto- ja viestintäteknologiaa matematiikan opetuksessa. Tieto- ja viestintäteknologian lisääminen matematiikanopetukseen on nähdäkseni ollut hyvin vaikeaa tai

jopa täysin olematonta. Taskulaskimet ovat aiemmin olleet ainoa asia, jossa tietotekniikkaa hyödynnetään matematiikan opetuksessa.

Peruskoulun yläluokkien kohdalla opetussuunnitelmassa opetuksen ydintehtäväksi sanotaan arkipäiväisten käsitteiden ymmärtäminen ja perusvalmiudet ongelmien mallintamiseen, hyvien ajattelumallien oppimisen ja täsmällisen ilmaisun harjoittamisen. Ongelmien mallintaminen ja ratkaisu on nimenomaan tulostuksessa ydinasiaa. Tietokone antaa oppilaalle poikkeuksellisen vahvan työkalun oman ajattelun jatkeeksi. Tietokone tekee ainoastaan, mitä sille sanoo ja virheiden tapahtuessa voi aina painaa “takaisin”-näppäintä. Tätä ei voi tehdä kovin monessa käsin toteutettavassa matematiikan mallintamisessa. Tietokonemallit edustavat todella täsmällistä ja äärimmäisen konkreettista ilmaisua, jotain mitä ei matematiikassa turhan usein kohtaa. Oppilaan tulee opetussuunnitelman mukaan oppia ratkaisemaan matemaattisia ongelmia, harjaantua loogisessa ajattelussa, sekä kyetä soveltamaan eri menettelytapoja tiedon käsittelyyn. Oppilaan tulee onnistua työskentelemään keskittyneesti yksin ja ryhmässä. Oppilaan kuuluu myös oppia mallinnusta, rakentamista ja mittaamista, sekä ajattelua tukevien välineiden käyttöä, jotka ovat puhtaasti 3D-tulostamisen ominta asiaa.

Peruskoulun kohdalla funktiot ja kuvaajat eivät vielä ole tarpeeksi vahvalla tasolla, jotta niiden tutkiminen onnistuisi mallinnuksella. Toki näitäkin taitava opettaja pystyy integroimaan halutessaan tietokoneavusteisesti sekä mallintamaan. Parhaat yhteydet löytyvät geometriasta, jossa lähes kaikki mainitut asiat voi käsitellä mallinnuksella/tulostamisella tai niistä voi luoda siihen sopivia tehtäviä tai projektitöitä. Arkipäivän pieniin asioihin 3D-tulostus on mitä mainioin apuväline. Puhtaasti matemaattisilla kaavoilla tai puhtailla geometrisilla muodoilla voidaan luoda elämää helpottavia keksintöjä, kuten rikkinäisen lelun varaosa tai kynäteline.

Kolmiulotteinen tulostaminen edustaa peruskoulun opetussuunnitelmassa niin suurta osaa oppilaan oppimiselle määritellyistä tehtävistä, että on jopa pieni ihme, ettei sitä käytetä vielä enempää opetuksessa.

## **4.2 Esimerkkejä käytännön toteutuksesta**

Yksi selvä ajatuksellinen ongelma, joka pystyttäisiin 3D-tulostamisen hyödyntämisellä ratkaisemaan, on kouluissa opetettava kaksi- ja kolmiulotteisten asioiden erot. Kolmiulotteiset matematiikan tehtävät koetaan oppijoiden toimesta usein vaikeiksi, koska he eivät osaa muodostaa

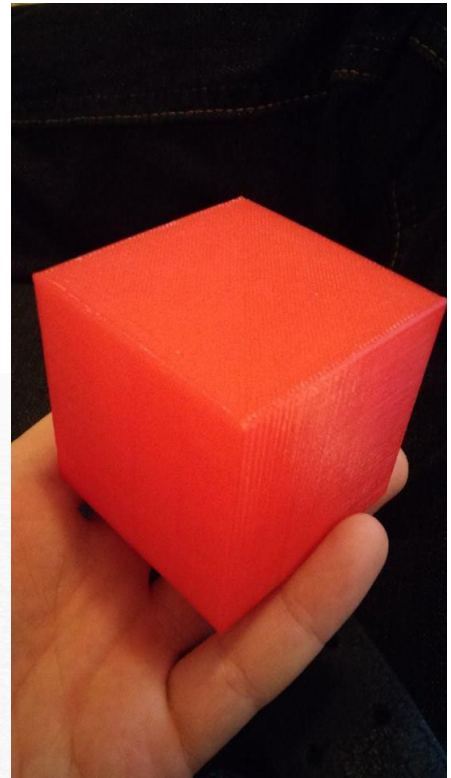
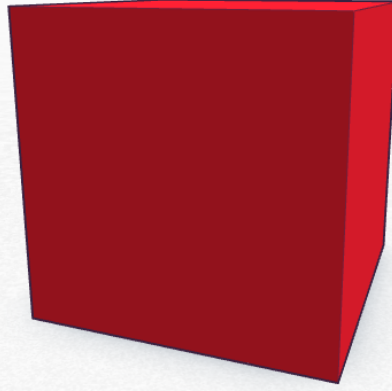
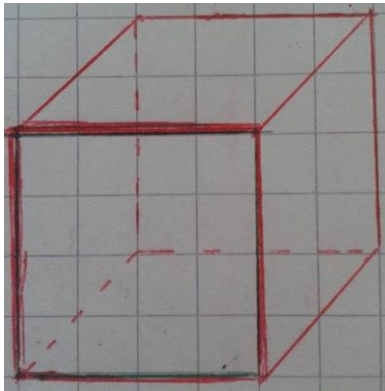


niitä mielessään. Kolmiulotteinen piirtäminen on vaikeaa, eikä siitäkään saa aina oikeaa käsitystä. Koen juuri tämän aiheuttavan usein virhekäsityksiä. Mallinnusohjelman käyttö kuitenkin vapauttaa meidät tästä kaksiulotteisen maailman puutteesta. Oppijat pystyvät parhaassa tapauksessa itse luomaan täydelliset kappaleet tietokoneella ja tulostamaan ne sitten itselleen käsin kosketeltaviksi malleiksi. Täten tehtävää ei tarvitse pyöritellä pelkästään kaksiulotteisessa maailmassa. Oppilaat voivat esimerkiksi luoda itselleen muistikappaleet, joista löytyy nimet kaikille kappaleen osille ja pinta-alojen ja tilavuuksien kaavat. Kappaleet voi myös personoida siten, että jokaisella kappaleen tehneellä sisältyy sen käyttöön oma ajatuksensa siitä, kuinka kyseessä on ihan itse tehty esine. Ei ainoastaan valmiina opettajalta annettu.



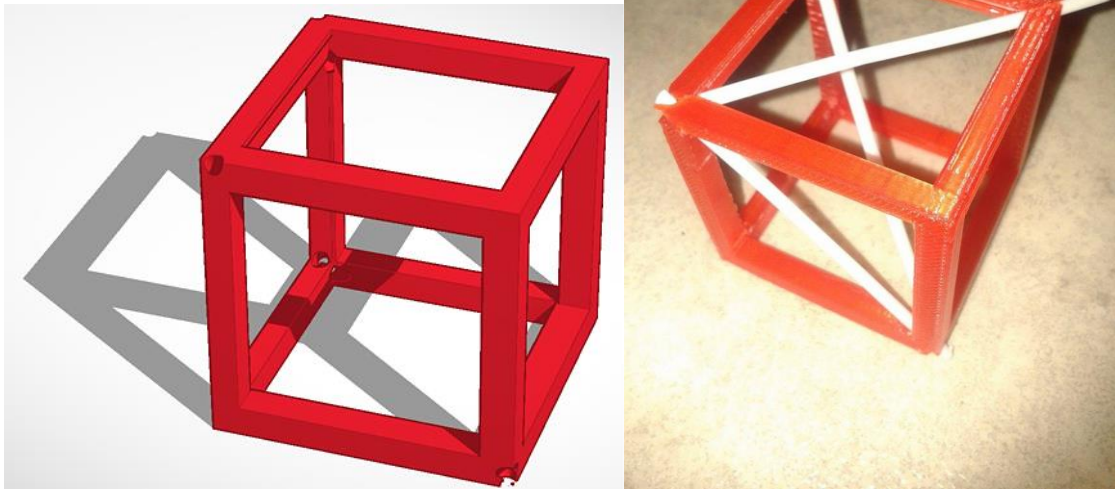
Kuva 3 Muistikuuio

Kolmiulotteinen malli näkyy jo suunnitteluvaiheessa tietokoneella. Sitä pystyy pyörittelemään ja jopa sen kestävyysarvoja voidaan mitata sopivilla ohjelmilla. Miksi se siis pitäisi myös tulostaa? Tietokoneella malli on kuitenkin vain kaksiulotteisena kuvana. Avaruusgeometria on yksi matematiikan vaikeimpia asioita ja erityisesti oppijat, joilla on vaikeuksia avaruudellisessa hahmottamisessa, saattavat kyetä ymmärtämään paremmin, kun he pystyvät käyttämään oikeasti hyväksi myös kosketusaistia. Tämä auttaa merkittävästi asioiden ymmärtämistä, jossa on abstrakti käsite, jonka voi yhtä hyvin esittää fyysisenä esineenä. Varsinkin peruskoulun yläluokilla, jossa avaruusgeometria otetaan ensimmäistä kertaa kunnolla käsittelyyn, olisi ensiarvoisen tärkeää luoda oppilaille selvä kuva kappaleista ja niiden toiminnasta. Opettajan piirroskuvat erilaisina piilossa ja esillä olevin viivoinensa eivät ole kaikille oppijoille ilmiselviä.



Kuvat 4-6 Piirretty, mallinnettu, ja tulostettu kuutio

Erityisesti lukion, mutta myös joskus peruskoulun yläluokilla, käytävä avaruuslävistäjä-tehtävämalli on hyvä esimerkki tulostettavasta kappaleesta. Opiskelijat voisivat tulostaa itselleen haluamansa esimerkkikappaleet ja käyttää niitä siihen asti, että luovat itselleen tarpeeksi vahvan kolmiulotteisen mallin asiasta. Esimerkkikappale olisi paras olla opiskelijan itsensä luoma, jotta hän tietäisi millaisista geometrisista yhteyksistä se muodostuu. Toinen usein ongelmallinen on tilavuuden ja kokonaispinta-alan ero. Jos opiskelijat pääsisivät useammin olemaan tekemisissä asioiden luomisen ja niihin liittyvien materiaalikulumäärien kanssa, he kykenisivät paremmin erottamaan tilavuuden ja kokonaispinta-alan.



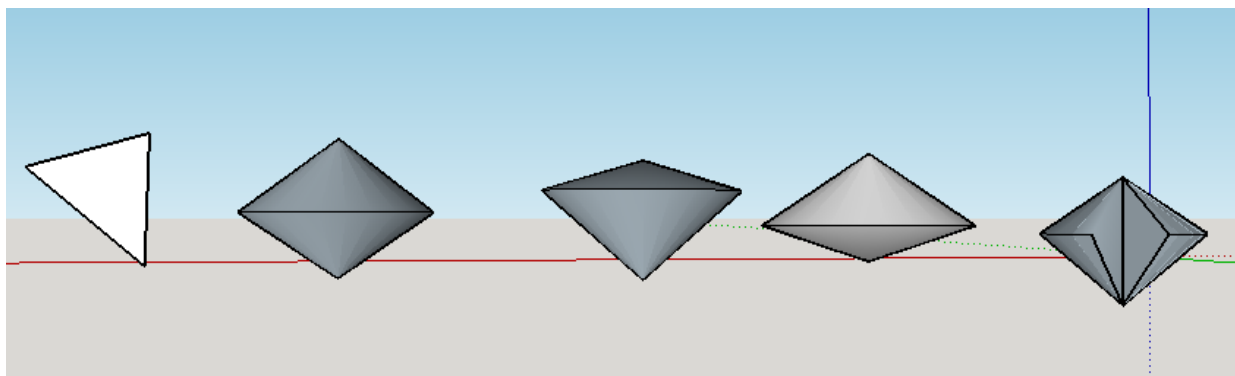
Kuvat 7, 8. Malli helpottamaan avaruuslävistäjien hahmottamista. Mallinnettu kappale on vasemmalla, tulostettu oikealla

Suuri osa peruskoulun suorittaneista ei kykene millään tavalla soveltamaan käytännössä edes yksinkertaisimpia matematiikan asioita. Tilavuuksien ja pinta-alojen kaavat saatetaan summittaisesti muistaa, mutta varsinkin jos tutkittava kappale on yhdiste useammasta kappaleesta, ei oppijoilla ole harmaintakaan aavistusta, miten niitä voisi lähestyä. Tulostimen kanssa työskentely avaa kuitenkin ajatuksellisia ovia, joiden avulla oppija näkee avaruusgeometrian kuviot useiden eri muotojen yhdisteinä.

Useimmiten koulut omistavat matemaattisten aineiden varaston, josta löytyy vaihdellen vaakoja, geometrisia objekteja ja niin edelleen. Nämä tarvikkeet ovat hyvin yksinkertaisia ja niiden tavoitteena on toimia apuvälineinä mahdollisimman moneen eri opetustavoitteeseen. Opettaja saattaa täydentää varastoa itse luomillaan esineillä. Kappaleita ostetaan usein valmiina ja esimerkiksi täytettävät geometriset kuviot ovat kouluissa todella yleisiä. 3D-tulostimen kenties paras hyödyntämiskohde puhtaasti matematiikan oppitunteja ajatellen on erinäisten mallien luominen. Kolmiulotteinen tulostaminen mahdollistaa hyvinkin yksityiskohtaisten mallien luomista ja halutessa jopa vain yksittäinen esimerkkitehtävä voi saada tulostimesta lisää merkitystä.

Esimerkkitehtävä:” Kolmio pyörrähtää vuorollaan jokaisen sivunsa ympäri. Osoita, että muodostuvista kappaleista sekä tilavuudeltaan että pinta-alaltaan pienin on se, joka syntyy kolmion

pyörähtäessä pienimmän sivunsa ympäri ja suurin se, joka syntyy pyörähdyksessä lyhimmän sivun ympäri.” (Lukion matematiikan kertauskirja)



Kuvat 9, 10. Esimerkkikuva, jossa ensin käytetty kolmio, jossa 3 eripituista sivua ja sen kolme pyörähdyskappaletta ja yhden niistä keskeneräinen pyörähdys. Tulostetuista puuttuu keskeneräinen pyörähdys

Vastaavanlaisia havainnollistavia kappaleita voisi myös tehdä esimerkiksi sini/cosini/tangentti aalloista tai pyörähdysintegraaleista. Lähes kaikki geometriaan liittyvät kappaleet voidaan tulostaa ja niistä olisi joillekin oppijoille merkittävää hyötyä.



Kuva 11. Cosiniaalto venytettynä lautaseksi (Mathgrll)

## 5 LAADULLINEN TUTKIMUS: AINEISTO JA MENETELMÄ

Kartoittava tutkimus katsoo mitä tapahtuu, löytää uusia ilmiöitä ja kehittää hypoteeseja. Kartoittavassa tutkimuksessa keskeisenä ovat teemat mallit ja luokat. Kvalitatiivisessa tutkimuksessa asetellaan kysymyksiä ja tulkitaan asioita hetkeen sopivista näkökulmista ja saavutetulla ymmärryksellä. Tutkimuksessa pyritään tutkimaan mahdollisimman kokonaisvaltaisesti haluttua kohdetta. Kvalitatiivisessa tutkimuksessa ei saavuteta objektiivisia faktoja, vaan pyritään löytämään ja paljastamaan tosiasioita olemassa olevista väittämistä. Tyypillisesti kvalitatiivisessa tutkimuksessa aineisto kootaan luonnollisissa tilanteissa. Tutkija pyrkii löytämään seikkoja, jotka ovat odottamattomia. (Hirsjärvi 2000.)

Tämä tutkimus on tapaustutkimus, case study. Se on empiirinen tutkimus, jossa pyritään monipuolisia tietoja käyttäen ymmärtämään tapahtumaa tietyssä ympäristössä.

Tapaustutkimuksessa valitaan oma tapaus, joka tässä tutkimuksessa on Summamutikkaan tulevat vapaaehtoiset noin 8 oppilasta. Tapaustutkimuksessa kohteesta pyritään kokoamaan monipuolisesti tietoja. Tapaustutkimus sallii yleistykset (Metsämuuronen 2003).

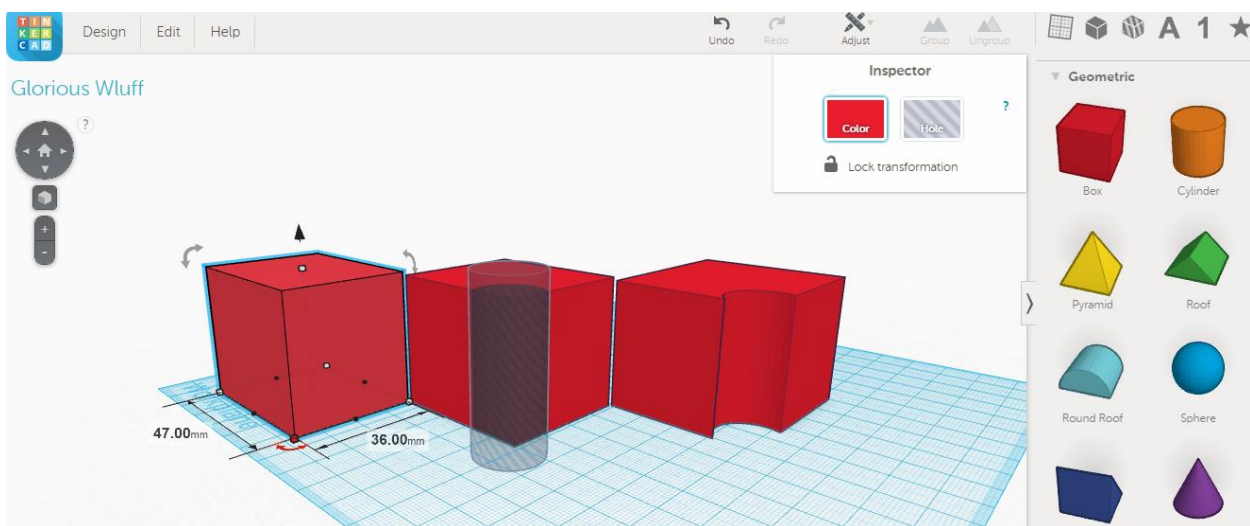
Tieteellisessä mielessä matematiikan opettaminen mallintamisen ja tulostamisen avulla on uusi asia, eikä aiheesta ole paljoa aiempaa tutkimusta. Kunnollisia tutkimuksia, joissa on mitattuja tuloksia, ei ole olemassa. Tästä johtuen tutkimus toteutetaan kvalitatiivisena ja siinä pyritään selvittämään 3D-tulostamisen ja mallintamisen mahdollisuuksia opetustarkoituksessa ja lisäksi selvittämään, ovatko itse oppijat sitä mieltä, että 3-ulotteinen mallinnus ja tulostus parantaisi oppimista ja miten se heidän mielestään parhaalla mahdollisella tavalla voidaan integroida opetukseen.

Mallinnuksen ja tulostamisen toimivuutta kokeillaan oppilaiden kanssa yhteistyössä Helsingin yliopistossa toimivan Summamutikka-keskuksen kanssa. Summamutikka-keskus on Helsingin yliopiston LUMA:keskuksen matematiikan resurssikeskus, joka pyrkii innostamaan lapsia ja nuoria matematiikan oppimiseen ja opiskeluun. Oppimistuokioon tulee osallistumaan noin kahdeksan peruskoulun seitsemännellä luokalla opiskelevaa poikaa ja tyttöä, sekä heidän matematiikan opettajansa. Oppilaat ovat valikoituneet Summamutikan kummiluokan vapaaehtoisista. Tuokion aikana on tavoitteena perehdyttää oppilaat 3D-mallinnuksen ja tulostamisen perustoimintoihin ja saada heille selkeä käsitys teknologian mahdollisuuksista, jotta heiltä voidaan odottaa ideoita tekniikan käyttämiseksi tai vähintään mielipiteitä teknologian toimivuudesta opetusikäytössä.

Opetushetken tavoitteena on herättää oppilaat pohtimaan 3D-tulostuksen mahdollisuuksia matematiikan ymmärtämiseen ja kertomaan, kuinka he toivoisivat opettajan käyttävän teknologiaa heidän opetuksessaan. Lisäksi kokeilusta saadaan osviittaa siitä, kuinka suuren määrän opetusta oppijat tarvitsevat tekniikan käyttämiseksi.

Tiedonkeruu tapahtuu oppituokion aikana havainnoimalla oppilaiden toimintaa ja esiin tulevia kysymyksiä ja ideoita. Tuokion aikana pyritään myös aktiivisesti kyselemään tarkentavia kysymyksiä. Tavoitteena on saada käsitys oppilaiden kokemuksista, toivomuksista ja ideoista, miten 3D-tulostamista voitaisiin hyödyntää matematiikan opetuksessa ja kokevatko oppilaat sen toimivaksi. Tarkoituksena ei ole selvittää, kuinka hyvin oppilaat oppivat asioita tulostamiskokeilun avulla.

Käytämme oppilastyössä mallinnusohjelmana hyvin yksinkertaistettua Tincercadia. Tincercad on maksuton selainpohjainen mallinnusohjelma, jolla on helppo graafinen käyttöliittymä. Ohjelma avataan käyttäjän selaimessa. Siinä on yksinkertainen, hiukan ruutuvihkoa muistuttava alusta, jolle rakennetaan oma malli. Mallien rakentaminen tapahtuu lähinnä platonisten kappaleiden yhdisteinä. Niitä voi lisätä toisiinsa tai käyttää vaihtoehtoisesti reiän tekemiseen. Ohjelma tarjoaa myös muun muassa numerot ja kirjaimet valmiina muotoina kappaleisiin yhdisteltäviksi.



Kuva 12. Esimerkkikappale tehtynä TINCERCADilla

Mallinnusprosessi aloitettiin luomalla kuutio ja määrittelemällä sille pituus, leveys ja korkeus sekä avaruudellinen sijainti. Kuution viereen tehtiin ympyrälieriö, joka tehtiin tuottamaan reikiä materiaan sijaan, laitettiin paikalleen ja tehtiin sopivan kokoiseksi. Kolmantena oleva kappale on yhdistetty



“Group”-toiminnolla yhdeksi yhtenäiseksi CAD-tiedostoksi. Tuote voidaan nyt ladata verkkosivulta ja lähettää tulostinohjelmalle lisäkäskyjä, kuten täytettä, kerrospaksuutta ja tulostusnopeutta varten.

Tutkimuspaikkana toimii Helsingin yliopiston Kumpulan kampuksella oleva tietokoneluokka ja sen vieressä oleva varastohuone, josta käytettävä tulostin löytyy. Opetustuokio alkaa hyvin lyhyellä 3D-mallinnuksen ja tulostimen toiminnan esittelyllä ja oppilaiden esitietojen selvityksellä.

Esiselvityksessä pyritään selvittämään keskustelun avulla, kuinka pitkällä geometrian opetus on luokassa ja onko joku oppilaista jo tutustunut aikaisemmin kolmiulotteiseen tulostukseen tai mallintamiseen. Vastauksien perusteella kyetään määrittelemään kuinka paljon aikaa tulee käyttää minimitietouden kehittämiseen. Alustuksen yhteydessä valitsemme Thingiversestä jonkun pienen kappaleen, jonka laitan tulostumaan lopputuokion ajaksi. Tarkkailen oppilaiden vastauksia ja ennakkokäsityksiä koko tuokion ajan. Opettajajohtoinen opetus pyritään pitämään minimissään, jotta kyetään mahdollisimman hyvin saamaan selville oppilaiden omat käsitykset, ennakkoletukset ja kehitysideat. Tietokoneille on avattu valmiiksi Tincercad-ohjelma, ja oppilaat saavat tutustua siihen vapaasti noin viisitoista minuuttia. Kierrän koko ajan luokassa ja avustan oppilaita samalla heidän ajatuksiaan ja ongelmiaan kirjaten. Jos kuitenkin huomataan oppilailla merkittäviä ongelmia ohjelman käytössä, voidaan tarvittaessa myös pitää kattavampi ensiesittely.

Kun mallintamiseen ja tulostimen toimintaan on tutustuttu pikaisesti, aloitamme itse päätyön.

Oppilaille annetaan ohjeeksi toteuttaa vapaavalintainen matematiikan tunnilla toimiva apuväline ja valmiiksi saadut tulostetaan myöhemmällä ajalla. Oppilaille tarjotaan myös valmista ehdotusta, mikäli heillä ei ole itsellään mitään ideoita. Mahdollisia oppitunneille hyödyllisiä välineitä tiedustellaan oppilaiden opettajalta, sekä tehtävien ratkaisuun, että esimerkkikappaleisiin liittyen.

## 6 PERUSKOULULAISTEN KÄSITYKSIÄ MALLINTAMISESTA JA TULOSTAMISESTA

Iso-Britannian opetusministeriö teki tutkimuksen, jossa usealle koululle annettiin 3D- laitteisto, sekä koulutus 3D-tulostimen käyttöön. Tuloksena oli, että heikollakin keskittymiskyvyllä varustetut oppijat onnistuivat ylläpitämään keskittymistään paremmin, kun tulokset pystyi näkemään heti. Yleisesti oppijat mainitsivat kykenevänsä 3D-tulostuksen avulla luomaan asioita, joita eivät aiemmilla välineillä kyenneet koskaan tekemään. Oppijat pystyivät siirtymään vaikeampien asioiden tutkimiseen ja tästä johtuen he myös saavuttivat paremman oppimiskäyrän. (UK Department of education (2013)). Kouluissa matematiikantuntien pahimpia ongelmia on motivaatiopuute. Oppijoita on vaikea saada kiinnostumaan matematiikasta, kun vastaukset saadaan laskimesta. Opettajan tärkein tehtävä on herättää oppilaissaan kiinnostusta oppimiseen ja kokeilemiseen. Mallintaminen on hyvä tapa syventää tietoja ja on myös hyvin helppoa näyttää oppilaille miksi näiden tulee tietyt asiat oppia ennen kuin päästään asioissa pidemmälle. Päämäärättömyys oppimisessa tylsiinnyttää oppijoita, ja tehtävien ratkaiseminen ei ole kannustavaa, jos palkkioksi jaetaan pelkkiä samoja tehtäviä hiukan haastavampina.

Steffisburgin koulussa pidetty 3D-tulostuskurssi antoi hyviä tuloksia. Kurssin oppilaat olivat ilmeisesti vapaaehtoisesti kurssilla ja olivat lähes aina paikalla, vaikka heillä oli usein muita päällekkäisiä menoja. Oppilaille tehdyn kysymyksen mukaan osa motivaatiosta johtui siitä, että 3D-tulostin viimein antoi heille mahdollisuuden muokata ajatuksensa konkreettiseksi objektiksi. Muille motivaatio tuli hauskemmassa tavasta oppia, siitä, että heillä oli projektinsa suhteen suuri vapaus toteuttaa itseään. (Canessa 2013.)

Oppilastutkimus toteutettiin 8.12.2014 Helsingin yliopistolla. Oppilaat tulivat paikalle koulupäivänsä jälkeen kello 14.30. Ryhmä koostui kahdeksasta oppilaasta ja heidän opettajastaan. Kaksi oppilaista oli tyttöjä ja loput poikia. Oppitunti alkoi hyvin lyhyellä kolmiulotteisen tulostamisen ja mallintamisen selittämällä. Selitys sisälsi esimerkkejä tulostimella tehtävistä kappaleista ja käytettävästä materiaalista. Oppilaat olivat aiemmin jo lukeneet lehdistä ja internetistä aiheesta, ja heillä oli riittävästi esitietoja ymmärtääkseen mistä oppitunnilla tultaisiin hetken päästä puhumaan.



Lyhyen esittelyn jälkeen oppilaat valitsivat Thingiversestä tulostettavaksi matkapuhelimen takakuoren. Siirryimme tietokonealuokasta viereiseen laboratorioluokkaan, jossa oli valmiina Makerbot replicator 2- tulostin. Oppilaat innostuivat silminnähden laitteesta ja kysymyksiä ja laitteiston ihmettelyä kesti pidempään kuin alunperin oli suunniteltu. Kysymyksien ja ihmettelyn yhteydessä laitettiin hiukan pienemmäksi skaalattu takakuori tulostumaan ja sen tulemistä seurattiin siihen asti, että laitteen toimintamenetelmä oli kaikille seuraajille ilmeistä. Yksi ryhmäläisistä kyseli vielä huolestuneena, pääsemmekö varmasti seuraamaan myös lopputulosta, ja tämä hänelle luvattiin.

Tulostimen toimintamallin ymmärtämisen jälkeen oppilaat pääsivät itse tietokoneiden ääreen oppimaan mallinnuksen perusteita. Oppilaat toimivat tietokoneilla pareittain, jotta heidän olisi helpompaa vastata esitettyihin kysymyksiin. Taululla esitettiin nopeasti tärkeimmät Tincercadin perustoiminnot. Esiteltäviä toimintoja olivat kuvioiden laitto työalustalle ja useamman osan yhdistäminen. Tämän jälkeen oppilaat saivat aloittaa vapaan mallintamisen. Seitsemäsluokkalaisten ei ole matematiikassa päässeet Platonin kappaleiden nimeämistä ja tunnistamista pidemmälle, minkä vuoksi he vain laajensivat kuvaansa siitä, kuinka lähes kaikki isommat kokonaisuudet voidaan ajatella koostuvan näistä yksinkertaistetuista osista.

Oppilaat ottivat avoimen tehtävänasetuksen innolla vastaan ja toteuttivat itselleen mielenkiintoisia töitä. Toteutettuihin esineisiin kuului muun muassa arkkitehtuurista suunnittelua, Mengerin pesusieni-fraktaalien ensimmäinen iteraatio, koriste-esineitä ja lisäksi yksi kappale pupuja. Ryhmän pojat suosivat selvästi rakentavampia aiheita ja tytöt enemmän sosiaalisia tavaroita. Tämä ryhmäkoko ei kuitenkaan riitä minkään isomman päätelmän tekemiseen aiheesta. Kaikki paikalla olleet oppilaat olivat hyvin innostuneita mallintamisesta ja tulostamisesta. He olivat myös hyvin kiinnostuneita siitä, miten he tämän käyttökerran ulkopuolella pääsisivät käyttämään 3D-tulostinta.

Oppimiskäynnin yhteydessä oppilailta kysyttiin pareittain heidän kolmiulotteiseen tulostamiseen liittyviä ajatuksiaan. Oppilaat olivat kahden hengen ryhmissä ja niihin viitataan numeroilla 1-4. Tulokset kerättiin haastattelemalla, ja haastattelija kirjoitti vastaukset ylös. Kysymyksiä oli neljä ja mikäli oppilaat eivät osanneet vastata autettiin heitä vastaamisessa lisäkysymyksillä. Kysymysten 1 ja 2 vastaukset olivat usein päällekkäiset. Kaikkiin kysymyksiin ei saatu joka ryhmältä vastauksia.

Kysymykset olivat:

1. Helpottaisiko 3D-tulostin matematiikan oppimistanne?

2. Mitä oppisit mielestäsi hyvin 3D-tulostamisen ja mallinnuksen avulla?
3. Mitä käyttömahdollisuuksia näet laitteella koulumaailmassa?
4. Miten haluaisit opettajan käyttävän 3D-tulostusta?
5. Mitä haluaisit itse tehdä laitteella?

Rakentelu ja arkkitehtuuri nousivat teemaksi useassa vastauksessa. Rakennelmien suunnittelu ja toteutus noudattaa hyvin Bloomin taksonomian ylimpiä asteita uuden luomisen ja arvioinnin muodossa. Aloitteessa rakennusprojektia pitää ensin muistaa ja ymmärtää tehtävänantoon liittyvät fyysiset faktat ja lainalaisuudet alempien ajattelun asteiden mukaisesti. Tämän jälkeen omia ajatuksiaan voi kehittää tietokoneella iteroiden aina Bloomin taksonomiassa mainittujen korkeampien ajattelun asteiden soveltaa, analysoida, arvioida - kautta yhä uudelleen ja uudelleen kunnes lopulta käsillä on itse luotuna halutun lainen esine. Oppilaiden mielestä rakentelu ja arkkitehtuuri olivat 3D-tulostamisen ja mallinnuksen ilmeisimpiä hyödyntämiskohteita, ja se sopii opetuksellisestikin täydellisesti.

Motivaatio on kaiken tekemisen ja oppimisen perusta. Oppilaat kokivat tekniikan käyttämisen opetuksessa hyväksi motivoivaksi tekijäksi. He kokivat, että normaali opetustyyli kaipaasi lisäväriä ja 3D-tulostin olisi hyvä väline sen tuojaksi. Osa oppilaista koki tulostimen käyttämisen enemmän palkkioksi kuin itseasialliseksi opetusvälineeksi. He esittivät ratkaisuna tulostimen käyttöä oppitunneilla, jos asiat ovat menneet hyvin.

Oppilaat olisivat selvästi halunneet kokeilla tulostamista internetistä löytyvistä vapaasti ladattavissa olevista malleista. Emme sitä yhtä esimerkkiä lukuun ottamatta tehneet, sillä tulostimia oli vain yksi ja tuokion tavoitteena oli pohtia mallinnuksen kautta teknologian mahdollisuuksia. Oppilaat esittivät työskennellessään kysymyksiä käytännöllisistä sovelluksista. Suklaan tulostaminen kiinnosti, mutta myös kodin pienet käyttöesineet olisivat olleet kiinnostavia työn aiheita. Yksi ryhmä aloitti mallinnuksen syömävälineen mallinnuksena, mutta lopulta he päätyivät mallintamaan Mengerin pesusientä, eikä ruokailuväline koskaan valmistunut. Lautasten ja muiden ruokailuvälineiden valmistus oli myös muiden oppilaiden mielessä, mutta mallinnuksiin asti se ei kuitenkaan ehtinyt.

Kolmiulotteinen tulostaminen on helppo väline tuottaa oppitunneille sopivia esimerkkikappaleita. Oppilaat mainitsivat, että kolmiulotteisten kappaleiden ymmärtäminen olisi selvästi helpompaa aitojen kappaleiden avulla kuin kirjasta oppimalla. Oppilaat eivät tosin ajatelleet vaihtoehtona

tuotteiden ostamista valmiina. Opettaja jopa lainasi oppitunnilla käytettäväksi muutamia tulostimella tehtyjä kappaleita. Tätä käytettiin todennäköisesti lisäämään mielenkiintoa oppitunnilla, eikä niinkään sen vuoksi, ettei esimerkkikappaleita muuten olisi ollut käytettävissä.

Oppiaineiden välinen yhteistyötä koettiin 3D-tulostimen avulla helposti järjestettäväksi. Osa oppilaista jopa puhui osittain päällekkäin esimerkiksi kemian ja biologian opettamisesta kysymyksen kohdistuessa vain matematiikkaan. Oppilaat haluaisivat nähdä tulostettuina kemiallisten yhdisteiden malleja, keuhkoja ja muita elimiä sekä kotitaloudessa suklaata. Suklaan tulostamiseen tosin liittyi ilmeisesti harhakuva, että kone erityisesti tekisi suklaata eikä ainoastaan sulattaisi siihen syötettyä materiaalia haluttuun muotoon.

Kaikki neljä ryhmää olivat sitä mieltä, että kolmiulotteinen mallinnus ja tulostus helpottaisi matematiikan oppimista. Kaikkien ryhmien toiminnasta tuli myös selvästi ilmi, että he olivat hyvin kiinnostuneita uudesta oppimisvälineestä ja toivoisivat näkevänsä mallinnusta, tulostamista ja valmiita opetusvälineitä oppitunneilla. Mainittaessa mahdollisuudesta päästä kirjastoon käyttämään laitetta, useampi oppilas kysyi vielä erikseen, miten se olikaan mahdollista.

Mallintamisen helppous ilmeni opetustuokion kulussa sillä, että oppilaiden tekemiseen ei tarvinnut puuttua paljoa. Suurimmat ongelmat tulivat monen kappaleen yhdistämisestä yhdeksi kokonaisuudeksi tulostamista varten. Yksi neljästä ryhmästä ei ollut tajunnut kolmiulotteisessa mallissa ollutta kolmatta ulottuvuusakselia vaan he lähtivät mallintamaan kaksiulotteisesti, mikä aiheutti malliin epäyhdenmukaisuutta. Mallissa olleet osat eivät olleet kiinni toisissaan, vaan niiden välissä oli rako, joka olisi pitänyt löytää kappaleen monelta kantilta tarkastelulla. Tämän tuokion jälkeen oppilaat selvästi kykenevät halutessaan itsenäisesti mallintamaan Tincercadilla.

Oppilaat eivät osanneet löytää mallintamisen ja tulostamisen välillä olevia erilaisia käsitteellisiä maailmoja, mutta sitä mahdollisesti ilmenisi enemmän, kun päästäisiin osaamisessa tutustumisvaiheen ohi. Tällä kertaa saavutettiin ainoastaan minimitiedot asioiden tekemisessä. Seuraavalla kerralla olisi voitu jo pohtia matemaattisia ongelmia samoin välinein. Hyvin kiinnostavaa oli sen ryhmän toiminta, joka teki Mengerin pesusientä. Mikäli olisin opettamassa kyseistä ryhmää jatkossa, voisimme päästä keskustelemaan siitä, kuinka kuution pinta-ala kasvaa koko ajan sen iteraatioiden edetessä ja täten myös sen tilavuuden pienentyessä. Nimenomaisesti oppilaat tekivät todennäköisesti tiedostamatta itse loistavan matemaattisen kappaleen, josta saisi tekemistä useammaksi tunniksi monenkin tasoiselle oppilaalle. Asia voisi myös herätellä oppilaita

äärimmäisen mielenkiintoisella tavalla erilaiseen matemaattiseen ajatteluun, kuin mitä koulussa tehdään normaalisti.

Tuokion sujuvuuden kannalta olisi ollut hyödyllisempää, jos laite olisi ollut samassa tilassa tietokoneiden kanssa, jolloin olisimme voineet samaan aikaan tulostaa oppilaiden tekemiä malleja. Tässä tilanteessa se kuitenkin ei ollut helposti järjestettävissä, sillä laitteen mahdollinen uudelleenkalibroiminen ei olisi tullut kysymykseen. Lisäksi olisi ollut huomattavasti parempi, mikäli samoja oppilaita olisi voinut hyödyntää useampaankin kertaan laitteistoa käyttämässä. Nämä eivät kuitenkaan olleet aikataulullisista syistä mahdollisia. Kaikilla paikalle tulleilla oppilailla oli hyvin korkea motivaatio mallintamiseen ja tulostamisen oppimiseen. Tähän kuitenkin vaikutti todennäköisesti huomattavasti opetustuokion vapaaehtoisuus. Oppilaat tulivat paikalle koulutuntiansa ulkopuolella ja tietävästi ainoana palkintona oli mahdollisuus saada oma mallinnuksensa tulokset tulostettuna. Tietoa normaalisti pakotettuina opetukseen olevien oppilaiden toiminnasta samanlaisessa tilanteessa ei ole.

## 7 JOHTOPÄÄTÖKSET

Kolmiulotteisen ajattelun ja kolmiulotteisen mallinnuksen tuominen suomalaiseen koulujärjestelmään voisi toimia hyvänä motivoijana ja kolmiulotteisen ajattelun parantajana. Tekniikan halventuminen entisestään mahdollistaa kouluille tekniikan hankkimista, ja työelämän muuttuminen kannustaa oppilaitoksia hyödyntämään entistä enemmän nykYTEKNOLOGIAA opetuksessa. Opettajat, jotka käyttävät opetuksessaan mallinnusta ja antavat oppijoilleen tietoa 3D-tulostamisen perusteista, jättävät oppijoilleen selvän kilpailuedun pelkästään jo sillä, että oppilaat ymmärtävät uusia valmistusmenetelmiä paremmin kuin muut oppilaat. Vaikka aiheesta ei ole tutkittua tietoa, on hyvin todennäköistä, että oppilaat myös saavat vahvemman käsityksen matematiikasta ja sen käyttämisestä, mikäli he saavat opastusta ja laajennusta ajattelutaitoihinsa.

3D-tulostaminen siirtää tuotannosta valmistamisen vaikeuden pois ja antaa mahdollisuuden nähdä, miten matematiikka ja tieteet ovat tärkeitä osia tuotteiden valmistusprosessissa. Tulostaminen antaa lukuisia mahdollisuuksia myös oppiaineiden yhdistämiseen. (UK Department of education (2013.)) Oppiaineiden yhdistäminen on opettajankoulutuksessa paljon puhuttu aihe. Konkreettisia esimerkkejä siitä harvoin on, mutta kuitenkin 3D-tulostaminen antaa matematiikalle kosketuspintaa esimerkiksi fysiikan, kuvaamataidon, käsitöiden, musiikin ja ympäristötiedon kanssa.

Mallinnus on mahdollista myös moniin kouluihin hankituilla Ipadeilla ja esimerkiksi paljon puhuttu Geogebra voisivat hyvin toimia yhdistelmänä, jolla oppitunneilla toteutettaisiin malleja, joita sitten tulostettaisiin yleisemminkin tulkittaviksi. Tämä toisi kaivattua tietotekniikan käyttöä matematiikankin opetukseen. Opetuksen osana mallinnusta tullaan todennäköisesti hyödyntämään kuitenkin enemmän fysiikan kuin matematiikan puolella. Fysiikan ilmiöissä itse prototyyppien toiminnalla on selvästi enemmän annettavaa lisäarvoa. Myös internetistä löytyvä fysiikan tuntisuunnitelmien määrä tukee tätä oletamaa.

Kolmiulotteinen tulostaminen ja mallinnus ei vielä nykyisillä oppisisällöillä mullista matematiikan opetusta, mutta varsinkin opettajille sen tarjoamat mahdollisuudet ovat arvokkaita hyödynnettäviksi. Oppilaat hyötyisivät suuresti opettajan tekemistä mallikappaleista ja syynä niiden puuttumiseen ei enää olisi raha tai käsityötaitojen puute. Oppisisältöihin tulisi muutenkin lisätä kolmiulotteista matematiikkaa, sillä sen ymmärtäminen auttaisi insinöörien lisäksi myös käytännön työtä tekeviä. Piirustusten ja ohjeiden ymmärtäminen olisi huomattavasti luonnollisempaa ja

helpompaa, jos kolmiulotteinen ajattelu olisi opittu jo koulun puolella. Tällä hetkellä sen osaaminen jää helposti liian hataraksi. Mahdollisesti muissa oppiaineissa, kuten käsitöissä tai kuvaamataidossa, tuleva kolmiulotteinen mallinnus parantaisi merkittävästi oppilaiden avaruudellista hahmottamista ja tämä voisi potentiaalisesti heijastua myös matematiikan tunneille parempana ymmärryksenä.

Jatkotutkimuksen kannalta olisi hyödyllistä tutkia tulostamisen vaikutuksia oppilaiden oppimiseen. Useat opettajat ovat käyttäneet opetuksessaan 3D-tulostimia, mutta tähän tutkimukseen ei saatu yhteyttä yhteenkään näistä. Olisi kiintoisaa tutkia, mitä tulostimien avulla on saatu aikaiseksi oppitunneilla. Tämä tutkimus voisi mahdollisesti olla huomattavasti laajempi otannaltaan ja tästä johtuen siitä saatavat tiedot olisivat huomattavasti paremmin yleistettävissä koko Suomen koulutusjärjestelmään.

Oletettavasti aiheesta on tulossa piakkoin tutkimusta Yhdysvaltain tai Iso-Britannian puolelta, joka voi myös tarjota mielenkiintoista aineistoa tutkittavaksi. Tämän tiedon hyödyntäminen suoraan verrattuna Suomeen toimiviin malleihin olisi kuitenkin suoritettava kriittisesti, sillä esimerkiksi Yhdysvalloissa matemaattisluonnontieteelliset aineet on usein yhdistetty yhdeksi oppiainekokonaisuudeksi, jossa kaikkia aineita opitaan samoilla tunneilla. Tähän oppiaineeseen 3D-tulostamisen käyttäminen on huomattavasti helpompaa kuin puhtaan matematiikan opetukseen, ja tämä aiheuttaisi oppimistuloksien parantumisen vertailemisen huomattavan vaikeutumisen. Olisi myös mielenkiintoinen lisätieto, kuinka moni opettaja on päätenyt oman laitteen hankintaan ja kuinka moni tyytyy kirjastojen palveluihin laitteiston tarjoajina ja tulostuspaikkoina.

Case-tutkimuksen tavoitteena ei ollut tarkastella oppilaiden osaamisen parantumista, vaan heidän tuntemuksiaan ja oletuksiaan laitteen toimivuudesta. Olisi hyvä käyttää tutkimusaiheena pidempiaikaista case-tutkimusta oman luokan kanssa. Mikäli koulu tai sponsoritaho suostuisi järjestämään laitteen oppitunneille käyttöön, voitaisiin kokeilla valinnaiskurssin tai potentiaalisesti jopa normaalin matematiikan kurssin yhteydessä käytettävää tulostamista. Tämän tutkiminen olisi hyvin hedelmällistä ja vahvistaisi käsitystä teknologian potentiaalisuudesta opetuskäytössä. Tutkimukseen käytetty ryhmä oli hyvin pieni ja koostui vapaaehtoisista oppilaista. Saadut tulokset olisivat voineet erota huomattavasti, jos kyseessä olisi ollut normaalimpi ryhmä, jossa oppilailla olisi ollut läsnäolopakko.

Vaikka monissa eri lehtijulkaisuissa puhuttiin suuresta määrästä valmista materiaalia 3D-tulostamisen opettamiselle, ei tämä kuitenkaan ole materialisoitunut valtavana määränä

tuntisuunnitelmia. Useassa eri tulostinvalmistajan ja opetusalan lehden artikkeleissa oli mainintana, kuinka nerokas tämä tekniikka on opetuksessa ja kuinka valmiita tuntisuunnitelmia löytyy otettavaksi. Näitä ei kuitenkaan juuri ole löytynyt ja yksi tähän tylsistynyt opettaja laittoikin nettiin avoimen dokumentin, johon toivoo linkitettävän kaikki avoimesti tarjotut tuntisuunnitelmat. Listalla ei ole kuin muutama matematiikkaan soveltuva oppituokio. Epäilemättä muutaman vuoden kuluttua tilanne on erilainen. Tällä hetkellä 3D-tulostimen käyttöön ottava opettaja joutuu kuitenkin itse materiaalinsa tekemään.

## LÄHTEET:

M. Ahtee & E. Pehkonen 2000: Johdatus matemaattisten aineiden didaktikkaan, Edita, Helsinki

M. Aksela (2005): Supporting Meaningful Chemistry Learning and Higher-order Thinking through Computer-Assisted Inquiry: A Design Research Approach,  
<http://ethesis.helsinki.fi/julkaisut/mat/kemia/vk/aksela/supporti.pdf>

E. Canessa, C. Fanda & M. Zennaro (2013): Low-cost 3D printing for science, education & sustainable development, ICTP—The Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics(Low-cost)

M. Frondelius (2014): Matematiikan yhteistoiminnallinen oppiminen luonnossa,  
<http://tampub.uta.fi/bitstream/handle/10024/96198/GRADU-1413898272.pdf?sequence=1>

J. Hannula (2014): Matematiikan kuusi osaa: David Tallin matematiikan kolmen maailman viitekehyksen laajentaminen Juha Oikkosen matematiikan kaksilla kasvoilla, Luma-sanomat 1(2)

S. Hirsjärvi, P. Remes ja P. Sajavaari (2000 ): Tutki ja Kirjoita, Tammer-Paino OY, Tampere

O. Knill and E. Slavkovsky 2013: Illustrating mathematics using 3D printers  
<http://www.math.harvard.edu/~knill/3dprinter/documents/trieste.pdf>

J. Lavonen ja V. Meisalo (2010): Kiinnostus ja motivaatio,  
[http://www.edu.fi/perusopetus/fysiikka\\_ja\\_kemia/kiinnostus\\_fysiikkaa\\_ja\\_kemiaa\\_kohtaan/kiinnostus\\_ja\\_motivaatio](http://www.edu.fi/perusopetus/fysiikka_ja_kemia/kiinnostus_fysiikkaa_ja_kemiaa_kohtaan/kiinnostus_ja_motivaatio)

J. Metsämuuronen 2003: Tutkimuksen tekemisen perusteet ihmistieteissä, Methelp, Helsinki (Metsämuuronen)

Räsänen, Ahonen, Malinen 2008: Matematiikka- näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen, Kopijyvä, Jyväskylä



H. Segerman: 3D printing for mathematical visualisation,  
[http://www.ms.unimelb.edu.au/~segerman/papers/3d\\_printed\\_visualisation.pdf](http://www.ms.unimelb.edu.au/~segerman/papers/3d_printed_visualisation.pdf) , 21.12.2014

L. Taalman 2014: <http://www.thingiverse.com/thing:170795>

L. Taalman“mathgrl” 2014: Maker home-blog, <http://makerhome.blogspot.fi/2014/02/day-166-mobius.html>, 21.12.2014

D. Tall, S. Vinner(1981): Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity,  
<https://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1981a-concept-image.pdf> (21.12.2014)

D. Tall (2013) How Humans Learn to Think Mathematically, Cambridge University Press

CNN (2014): Obama's speech highlights rise of 3-D printing,  
<http://edition.cnn.com/2013/02/13/tech/innovation/obama-3d-printing/> , 21.12.2014

Helsingin yliopisto summamutikka keskus, <http://www.luma.fi/summamutikka>, 21.12.2014

Peruskoulun opetussuunnitelman perusteet 2004

UK Department of education (2013): 3D printers in schools: uses in the curriculum,  
[https://www.gov.uk/government/uploads/system/uploads/attachment\\_data/file/251439/3D\\_printers\\_in\\_schools.pdf](https://www.gov.uk/government/uploads/system/uploads/attachment_data/file/251439/3D_printers_in_schools.pdf) , 21.12.2014.

Thingiverse: [www.thingiverse.com](http://www.thingiverse.com)

Tincercad: [www.tincercad.com](http://www.tincercad.com)



Tiedekunta/Osasto Fakultet/Sektion – Faculty		Laitos/Institution– Department	
Matemaattis-luonnontieteellinen tiedekunta		Matematiikan ja tilastotieteen laitos	
Tekijä/Författare – Author Miika Suvanto			
Työn nimi / Arbetets titel – Title 3D-mallinnus ja tulostaminen matematiikan opetuksessa			
Oppiaine /Läroämne – Subject Matematiikka			
Työn laji/Arbetets art – Level	Aika/Datum – Month and year	Sivumäärä/ Sidoantal – Number of pages	
Pro-gradu tutkielma	1/2015	41	
Tiivistelmä/Referat – Abstract			
<p>3D-tulostamisella on potentiaalia muuttaa tavaroiden valmistamista merkittäväällä tavalla. Mallintaminen parantaa kaikenlaisien oppijoiden ymmärrystä vaikeista, abstrakteista asioista ja muuttaa matematiikan monimutkaisia käsitteitä helposti sisällytettäviksi esineiksi. Oppijat arvostavat itse tekemistä ja 3D-tulostaminen on yksi helpoimmista tavoista luoda monimutkaisia esineitä.</p> <p>3D-tulostaminen vaatii aina tietokoneella luodun kolmiulotteisen mallin, joka voidaan luoda itse tai se voidaan ladata jonkun muun valmiiksi tekemänä. Itse mallien tekemiseen löytyy useita erilaisia ohjelmia, joista monet helppokäyttöiset ovat oppimiskäyttöön ilmaisia. Tietokoneen, jolla mallinnusta tehdään, ei tarvitse olla erityisen suuri laskenteholtaan, ja normaali kotitietokoneet käyvät ongelmitta. Tärkein hankittava osa on itse 3D-tulostin, joita saa normaalin paperitulostimen kokoisesta aina auton kokoihin laitteisiin. Kotikäyttöiset mahtuvat hyvin luokkahuoneisiin tai tarvikevarastoon. Tulostimien hinnat ovat viimein tulleet tarpeeksi mataliksi, jotta niiden hankkiminen koulun käyttöön on mahdollista. Työn tarkoituksena on esitellä 3D-tulostin opetusvälineenä ja löytää käyttötarkoituksia ja perusteita sen käytölle.</p> <p>Työn ohessa toteutettiin vapaaehtoisryhmälle 7-luokkalaisia kokeilu, jossa katsottiin miten he kykenevät omaksumaan 3D-mallinnuksen perusteet ja ymmärtävät suunnitellessaan tulevaa tulostamista. Oppilaat käyttivät opetustuokion ajan mallinnusohjelmaa ja heiltä samaan aikaan kysyttiin mielipiteitä ja ajatuksia 3D-mallinnuksen ja tulostamisen käyttämisestä opetuksessa. Oppilaat toivoivat, että oppitunneilla otettaisiin käyttöön 3D-tulostin. Vaikka kysymykset esitettiin nimenomaan matematiikan opetuksen näkökulmasta, esittivät oppilaat ideoita myös muiden kouluaineiden opetukseen.</p> <p>Opetuksessa tekniikkaa voidaan käyttää joko siten, että oppijat käyttävät sitä aktiivisesti jonkin matemaattisen ilmiön oppimiseksi, tai vaihtoehtoisesti opettaja voi käyttää sitä esimerkkikappaleiden tekemiseen. 3D-tulostamisen suurin hyöty on se, että sillä voidaan tuottaa laitteen asettamisessa rajoissa hyvinkin monimutkaisen muotoisia kappaleita. Esimerkkeinä tällaisista opettajan esimerkkimalleista tutkielmasta löytyy esimerkiksi kolmion pyörähdyskappaleita ja kuution erilaisten lävistäjien havainnollistamiseksi tehty malli.</p> <p>Johtopäätöksenä päädyttiin siihen, että 3-ulotteinen tulostaminen sopii opetuksessa parhaiten opettajan oppimateriaalin tuottamiseen. Oppilaskäytössä laite toimisi parhaiten lähinnä vapaavalintaisissa matematiikan kursseissa. Myös matematiikan oppiminen voisi hyötyä selvästi kolmiulotteisen ajattelun parantumisen muodossa, mutta matematiikan tunneilla ei ole tarpeeksi ylimääräistä aikaa. Paras yhdistelmä voitaisiinkin saada sillä, että koulun teknisten töiden tai kuvaamataidon opettaja opettaisi omiin tunteihinsa liittyen laitteen käyttöä, jolloin matematiikan oppitunneilla kyettäisiin hyödyntämään 3D-tulostamista ilman siihen liittyvää turhan suurta ajallista panostamista.</p>			
Avainsanat – Nyckelord – Keywords 3D-tulostaminen, opetus, mallintaminen, matematiikka			
Säilytyspaikka – Förvaringställe – Where deposited			
Muita tietoja – Övriga uppgifter – Additional information			